# Cenni alla Teoria della Misura

http://pcaen1.ing2.uniroma1.it/mostacci/
→ Didattica
→ Laboratorio di Misure ad Alta Frequenza

## Precisione di una misura

La precisione di una misura e' la capacità di riprodurre lo stesso risultato ripetendo più volte la stessa misura.

## Accuratezza di una misura

L'accuratezza di una misura e' la capacità di riprodurre un risultato esente da errori sistematici.

## Sensibilità di uno strumento

La sensibilità di uno strumento e' la capacità di apprezzare piccole variazioni della grandezza in esame.

## Risoluzione di uno strumento

La risoluzione di uno strumento rappresenta la minima variazione apprezzabile della grandezza in esame attraverso tutto il campo di misura: essa rappresenta il valore dell'ultima cifra significativa ottenibile.

Per cui se la scala dello strumento parte da zero ed è lineare la risoluzione è costante lungo tutto il campo di misura e risulta numericamente uguale alla sensibilità (che e' invece la derivata locale).

# Misura resistenza

## Misure ripetute di una resistenza

Valore della singola misura

Affidabilità della misura

10 misure

| Ohm | Ohm |
|---|---|
| 101 | 2.6 |
| 102 | 2.6 |
| 107 | 2.6 |
| 98 | 2.6 |
| 105 | 2.6 |
| 100 | 2.6 |
| 101 | 2.6 |
| 103 | 2.6 |
| 102 | 2.6 |
| 100 | 2.6 |

Quanto vale la resistenza? **101.90** **0.82** Quanto e' affidabile questo valore?

## Misure ripetute di una resistenza (II)

Valore della singola misura

Affidabilità della misura

| Ohm | Ohm |
|---|---|
| 101 | 2.5 |
| 102 | 2.5 |
| 107 | 2.5 |
| 98 | 2.5 |
| 105 | 2.5 |
| 100 | 2.5 |
| 101 | 2.5 |
| 103 | 2.5 |
| 101 | 2.5 |
| 102 | 2.5 |
| 107 | 2.5 |
| 98 | 2.5 |
| 105 | 2.5 |
| 100 | 2.5 |
| 101 | 2.5 |
| 103 | 2.5 |
| 102 | 2.5 |
| 100 | 2.5 |
| 102 | 2.5 |
| 100 | 2.5 |
| 101.90 | 0.57 |

**20 misure**

Quanto vale la resistenza?

Quanto e' affidabile questo valore?

## ELABORAZIONE STATISTICA DI DATI SPERIMENTALI

Scopo di ogni misurazione è la determinazione del **valore vero** di un misurando ***M***.

Le imperfezioni degli strumenti, le variazioni delle condizioni ambientali e l'influenza dell'osservatore provocano inevitabili **errori di misura** a causa dei quali non è possibile trovare il valore vero ***M***.

Si assume che i valori $x_i$ ottenuti da diverse misurazioni siano i valori assunti da una **variabile casuale X** che obbedisce ad una **distribuzione di probabilità** caratterizzata in particolare dai parametri **m** e **σ**.

In assenza di **errori sistematici** il valore atteso **m** coincide col valore vero ***M*** del misurando.
La deviazione standard σ è una misura della variabilità di un singolo valore misurato dal valore atteso **m**.

## Teoria della misura

In assenza di **errori sistematici** il valore atteso **m** coincide col valore vero ***M*** del misurando.

L'entità degli errori non è nota (non si conosce il valore vero!!!) ma l'effetto degli errori casuali è evidente (basta ripetere la misura nelle stesse condizioni).

L'individuazione, riduzione e/o correzione degli errori sistematici richiede l'uso di strumenti, metodi di misura e operatori diversi.

Come stima dell'incertezza (originata dagli errori casuali) viene utilizzata la deviazione standard sperimentale.

Si suppone che sia stato fatto tutto quanto possibile per ridurre gli effetti degli errori sistematici; poi si associa alla misura un'incertezza pari alla deviazione standard sperimentale della media aritmetica di più misure.

## Teoria della misura

INCERTEZZE DI TIPO A

Quelle ottenute a partire dalla deviazioni standard sperimentale della media aritmetica

$$u(X) = \sigma_s(\bar{X}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1,N}(x_i - \bar{X})^2}{N(N-1)}}$$

INCERTEZZE DI TIPO B

non ottenute come deviazione standard sperimentali della media aritmetica

Se viene eseguita una sola misurazione l'incertezza deve essere ricavata dalla conoscenza delle caratteristiche degli strumenti utilizzati o da risultati precedenti ottenuti nelle stesse condizioni.

Se non c'è una conoscenza specifica della distribuzione di X all'interno di un certo intervallo, si può solo assumere che essa sia costante nell'intervallo e nulla all'esterno (distribuzione uniforme). In questo caso la deviazione standard è pari a
1/√12 volte la larghezza dell'intervallo
(p. es.: 0,29 volte la divisione sulla scala dello strumento o l'intervallo definito da una tolleranza)

$$u(X) = \sigma_s(X) = \frac{\text{div}}{\sqrt{12}} = 0{,}29\ \text{div}$$

Teoria della misura

## MISURE INDIRETTE: VALORE

Se una grandezza Y non è misurata direttamente ma è determinata da altre M grandezze (misurate direttamente) $X_1, X_2, \ldots, X_N$ attraverso la relazione:

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$$

allora una stima y di Y è data da

$$Y \approx y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_N)$$

con $\overline{X}_i = \dfrac{\sum_{k=1,M_i} x_{ik}}{M_i}$

dove il k-mo valore della grandezza $X_i$ viene indicato con $x_{ik}$.

Questa stima è esatta solo se la funzione è lineare; altrimenti costituisce un'approssimazione al primo ordine dello sviluppo in serie di Taylor.

Teoria della misura

## MISURE INDIRETTE: INCERTEZZA

Applicando la formula per la combinazione delle varianze alla relazione

$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_M)$ si ottiene $\sigma^2(Y) = \sum_{i=1,N} \left( \left. \dfrac{\partial f}{\partial X_i} \right|_m \right)^2 \sigma^2(X_i)$

e sostituendo alle $X_i$ le loro stime $X_i = \overline{X}_i \pm \sigma_s(\overline{X}_i)$

si ricava: $Y \approx y \pm \sigma_s(Y) = f\left(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_N\right) \pm \sqrt{\sum_{i=1,N} \left( \left. \dfrac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{\overline{X}} \right)^2 \sigma_s^2\left(\overline{X}_i\right)}$

dove $\overline{X}$ è il punto $\overline{X} = \left\{ \overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_N \right\}$

$$\boxed{\sigma_s(Y) = \sqrt{\sum_{i=1,N} \left( \left. \dfrac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{\overline{X}} \right)^2 \sigma_s^2\left(\overline{X}_i\right)}}$$

è detta formula di propagazione delle incertezze assolute

Se una o più delle $X_i$ vengono misurate una sola volte ottenendo il valore $x_i$ e l'incertezza (di tipo B) $\sigma_B(X_i)$ allora $X_i = \overline{X}_i \pm \sigma_s(\overline{X}_i)$ viene sostituito da $X_i = x_i \pm \sigma_B(X_i)$

Teoria della misura

## MISURE INDIRETTE: ESEMPIO

Misurare la densità di un cilindro di massa M, altezza h e diametro d.
M = 13,2 12,4 14,0 12,8 14,6 13,5 g
h = 10,02 cm (una sola misura con strumento analogico)
d: in misure precedenti si era ottenuto 8,500 mm mediante calibro (50μm/div)

Teoria della misura

## MISURE INDIRETTE: ESEMPIO

Misurare la densità di un cilindro di massa M, altezza h e diametro d.
M = 13,2 12,4 14,0 12,8 14,6 13,5 g
h = 10,02 cm (una sola misura con strumento analogico)
d: in misure precedenti si era ottenuto 8,500 mm mediante calibro (50μm/div)

Dai dati si ricava:

M $\quad \sum_{i=1,6} m_i = 80{,}5\,\mathrm{g} \quad \overline{M} = \dfrac{\sum_{i=1,6} m_i}{6} = 13{,}427\,\mathrm{g} \quad \sigma_{\overline{M}} = \dfrac{\sigma_M}{\sqrt{6}} = 0{,}326\,\mathrm{g}$

$\sum_{i=1,6} m_i^2 = 1083{,}25\,\mathrm{g}^2 \quad \sigma_M = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1,6} m_i^2 - 6 \cdot \overline{M}^2}{5}} = 0{,}801\,\mathrm{g} \quad M = (13{,}43 \pm 0{,}33) \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}$

h $\quad$ l'unica misura è riportata al decimo di mm; quindi la divisione dello strumento è il mm; $\sigma_B$= 1mm/√12 = 0,29 mm $\quad h = (100{,}20 \pm 0{,}29) \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$

d $\quad \sigma_B$= 50μm/√12 = 14,43 μm $\quad d = (8{,}500 \pm 0{,}014) \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$

e quindi $\rho = \dfrac{\overline{M}}{\frac{\pi}{4}\overline{d}^2\overline{h}} \pm \sqrt{\left( + \dfrac{1}{\frac{\pi}{4}\overline{d}^2\overline{h}} \right)^2 \sigma_{\overline{M}}^2 + \left( -2\dfrac{M}{\frac{\pi}{4}\overline{d}^3\overline{h}} \right)^2 \sigma_{\overline{d}}^2 + \left( -\dfrac{M}{\frac{\pi}{4}\overline{d}^2\overline{h}^2} \right)^2 \sigma_{\overline{h}}^2}$

$$\rho = 2\,362 \pm \sqrt{(175\,875)^2 (0{,}33 \times 10^{-3})^2 + (-555\,766)^2 (0{,}014 \times 10^{-3})^2 + (-23\,573)^2 (0{,}29 \times 10^{-3})^2} =$$

$$= 2\,362 \pm \sqrt{(58{,}039)^2 + (7{,}781)^2 + (6{,}836)^2} = (2\,362 \pm 59)\,\mathrm{kg/m^3}$$

## Teoria della misura

MISURE INDIRETTE: INCERTEZZA RELATIVA

Se la funzione $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_M) = c\, X_1^{p_1}\, X_2^{p_2} \ldots X_N^{p_N}$ è, cioè, un monomio, applicando la formula di propagazione delle incertezze si ottiene da

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} = c\, X_1^{p_1}\, X_2^{p_2} \ldots p_i X_i^{p_i - 1} \ldots X_N^{p_N} = p_i \frac{Y}{X_i}$$

$$\sigma_s(Y) = \sqrt{\sum_{i=1,N} \left( \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{\bar{x}} \right)^2 \sigma_s^2(\bar{X}_i)} = \sqrt{\sum_{i=1,N} \left( p_i \frac{Y}{\bar{X}_i} \right)^2 \sigma_s^2(\bar{X}_i)}$$

e quindi:

$$\frac{\sigma_s(Y)}{Y} = \sqrt{\sum_{i=1,N} p_i^2 \left( \frac{\sigma_s(\bar{X}_i)}{\bar{X}_i} \right)^2}$$

formula di propagazione delle incertezze relative

## Teoria della misura

PROPAGAZIONE INCERTEZZE RELATIVE: ESEMPIO

Riprendiamo l'esempio del cilindro di massa M, altezza h e diametro d.

$$M = (13{,}43 \pm 0{,}33) \times 10^{-3}\,\mathrm{kg} \rightarrow \frac{\sigma_M}{M} = \frac{0{,}33 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}}{13{,}43 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}} = 0{,}02457 = 2{,}5\%$$

$$h = (100{,}20 \pm 0{,}29) \times 10^{-3}\,\mathrm{m} \rightarrow \frac{\sigma_h}{h} = \frac{0{,}29 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}}{100{,}2 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 0{,}0028942 = 0{,}29\%$$

$$d = (8{,}500 \pm 0{,}014) \times 10^{-3}\,\mathrm{m} \rightarrow \frac{\sigma_d}{d} = \frac{0{,}014 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}}{8{,}5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 0{,}0016471 = 0{,}16\%$$

$$\rho = \frac{\overline{M}}{\frac{\pi}{4}\overline{d}^2\overline{h}} = 2362\,\mathrm{kg/m^3}$$

$$\sigma_\rho = \left( \frac{\sigma_\rho}{\rho} \right) \rho = \sqrt{(+1)^2 \left( \frac{\sigma_M}{M} \right)^2 + (-2)^2 \left( \frac{\sigma_d}{d} \right)^2 + (-1)^2 \left( \frac{\sigma_h}{h} \right)^2}\ \rho$$

$$\rho = 2\,362 \left( 1 \pm \sqrt{(0{,}025)^2 + 4(0{,}0029)^2 + (0{,}0016)^2} \right) = 2\,362(1 \pm 0{,}02571) = (2362 \pm 61)\ kg/m^3$$

## Teoria della misura

L'incertezza misura accuratezza o precisione?

## Teoria della misura

L'incertezza misura accuratezza o precisione?