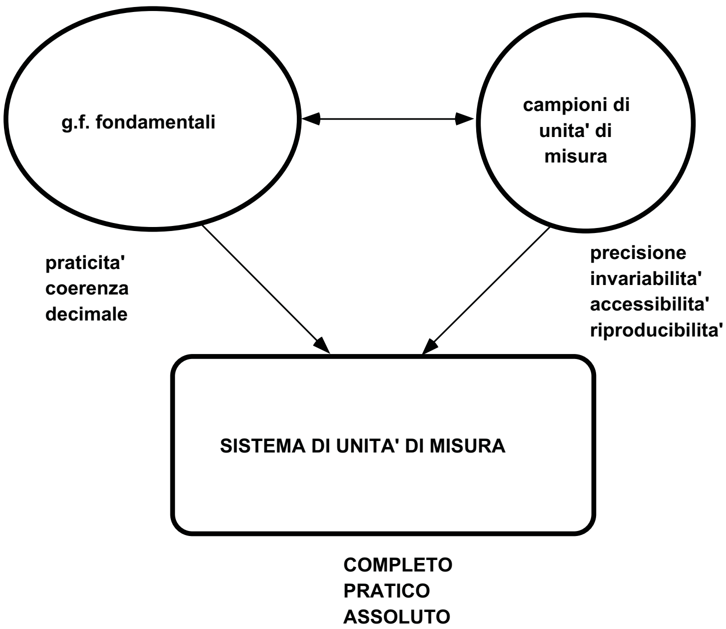
SISTEMI DI UNITÀ DI MISURA

Prima di operare con misure sui fenomeni fisici è importante decidere quale sistema di unità di misura adottare. Infatti, a seconda della scelta, variano non solo i valori numerici dei risultati ma a volte anche la forma delle equazioni che descrivono le leggi fisiche.

Un sistema di unità di misura è caratterizzato dalle grandezze fisiche scelte come fondamentali, dalle eventuali convenzioni di coordinazione e dai campioni di unità di misura.
Deve essere ispirato da criteri di praticità e deve risultare completo (deve consentire la misurazione di tutte le g.f.) e assoluto (le misure non devono variare da luogo a luogo e al trascorrere del tempo).
La praticità si riflette nella scelta delle g.f. fondamentali (p.es. si preferisce la lunghezza alla superficie o al volume), nell'adozione dei criteri di coerenza e del sistema decimale per i multipli e sottomultipli.
L'assolutezza del sistema è invece garantita dalla scelta dei campioni di unità di misura che devono risultare precisi (il valore della loro misura non deve variare da una misurazione all'altra) e invariabili nel tempo e nello spazio. Anche i campioni di unità di misura devono risultare pratici e quindi devo essere o accessibili (presso le opportune istituzioni Nazionali e/o Internazionali) o riproducibili in laboratorio.



Sistema Internazionale (S.I.) - In Italia legge del 1982

Il sistema di unità di misura che oggi meglio risponde a queste esigenze è il Sistema Internazionale (SI).

Il D.P.R. 12 agosto 1982 n. 802, specificando le norme per l'attuazione della direttiva CEE n. 80/181 relativa alle unità di misura, obbliga l'uso del SI.
Anche se adotteremo il SI è bene ricordare che molti testi, anche recenti, utilizzano sistemi di unità di misura differenti (spesso il vecchio M.K.S.A) ormai non più consentiti dalla legge.

Definizioni

Grandezza misurabile (grandezza fisica):
attributo di un fenomeno, corpo o sostanza che può essere distinto qualitativamente e determinato quantitativamente.
P.es.: lunghezza, tempo, massa, temperatura, resistenza elettrica.
Le grandezze che possono essere poste in ordine di grandezza relativo sono grandezze dello stesso tipo (omogenee); esse possono essere raggruppate per categorie:
P.es.: lavoro, calore, energia; spessore, circonferenza, lunghezza d'onda.

Grandezza fondamentale:
una delle grandezze che in un sistema di unità di misura sono convenzionalmente accettate come funzionalmente indipendenti dalle altre.
Nel SI alcune grandezze fondamentali sono lunghezza, tempo, massa, temperatura.
Per ogni grandezza fondamentale è necessario stabilire convenzionalmente un'unità di misura; ad ogni unità di misura deve corrispondere un campione di unità.

Grandezza derivata:
grandezza definita in un sistema di unità come funzione delle grandezze fondamentali di quel sistema.
P.es. nel SI la velocità è una grandezza derivata da lunghezza e tempo.

Dimensione di una grandezza:
espressione che rappresenta una grandezza di un sistema di unità come prodotto di potenze di fattori (detti dimensioni) che rappresentano le grandezze fondamentali di quel sistema.
P.es. nel SI la dimensione della forza è $[L][M][T]^{-2}$ e $[L]^2[M][T]^{-2}$ è la dimensione dell'energia, del calore, del momento di una forza.
Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché una relazione fra grandezze fisiche sia corretta è che le dimensioni delle grandezze unite dalla relazione di uguaglianza o dalle operazioni di somma o sottrazione siano le stesse:
p.es.: $E = m\,g\,h + 1/2\,m\,v^2$; i 3 termini hanno le dimensioni $[L]^2[M][T]^{-2}$.
Gli argomenti di funzioni sviluppabili in serie di potenze (p.es. e^x, $\sin(x)$, $\log(x)$, $\sinh(x)$, ...) hanno sempre dimensione 1.

Grandezza di dimensione 1 (adimensionale, numero puro):
per esempio: angolo piano, angolo solido, indice di rifrazione, costante dielettrica relativa, numero di Mach.

Unità di misura:
quantità particolare che convenzionalmente è stata adottata come la quantità alla quale vanno comparate le altre grandezze dello stesso tipo per esprimerne la grandezza relativa.

Simbolo di una unità di misura:
segno convenzionale che designa una unità di misura; p.es.: m per metro, K per kelvin, A per ampere, V per volt, W per watt.
I nomi di tutte le unità di misura sono nomi comuni privi di accento e vanno scritti con l'iniziale minuscola; sono invariabili al plurale con l'eccezione di: metro, chilogrammo, secondo, candela, mole, radiante e steradiante.
I simboli delle unità vanno scritti con la maiuscola quando il nome dell'unità è derivato da un nome proprio; minuscola negli altri casi.

Quando l'unità di misura non è accompagnata dal valore numerico deve essere scritta per esteso e non con il simbolo.
Indipendentemente dal testo in cui sono inseriti, i simboli vanno scritti in caratteri verticali lasciando uno spazio fra il valore e l'unità (p.es. 5,4 mA e non 5,4mA o *5,4 mA*); non devono mai essere seguiti dal punto di abbreviazione.

Sistema di unità di misura:
insieme di unità fondamentali e unità derivate definito seguendo le regole assegnate per un sistema di grandezze assegnato; per esempio: c.g.s., M.K.S.A., S.I.
Un sistema di unità è coerente se tutte le unità derivate sono coerenti; cioè sono espresse come prodotto di potenze di unità fondamentali.
P.es:1 Hz = 1 s^{-1}; 1 N = 1 kg m s^{-2}; 1 Pa = 1 kg m^{-1} s^{-2}; 1 J = 1 kg m^2 s^{-2}

Campione (di unità di misura):
materiale o sistema di misura destinato a definire, realizzare, conservare o riprodurre una unità di grandezza per servire da riferimento.
Non appena la tecnologia consente di utilizzare un fenomeno in modo più stabile e riproducibile che in precedenza, si cerca di utilizzarlo per definire un nuovo campione di unità di misura (per un nuovo sistema di unità di misura). Il suo valore, per ovvi motivi di praticità, non dovrà discostarsi dalla vecchia unità di misura per più della sua riproducibilità.

Campione (primario e secondario):
il campione (primario) è designato o largamente accettato come avente le più alte qualità metrologiche; il suo valore è stabilito senza riferimento ad altri campioni della stessa specie; può riferirsi indifferentemente a grandezze fondamentali o derivate.
Il campione secondario è un campione il cui valore è determinato per confronto col campione primario della stessa grandezza.

Tracciabilità:
proprietà di un campione o del risultato di una misura di essere rapportabile ai campioni locali, nazionali o internazionali mediante una catena ininterrotta di confronti effettuati con incertezze determinate.
I campioni secondari e/o quelli ottenuti a partire da questi ultimi non hanno lo stesso grado di riproducibilità del campione primario: si pensi al campione di lunghezza che da un lato richiede un orologio atomico per sfruttare la definizione di "metro campione" e dall'altro, per poter essere utilizzato p.es. per la graduazione di un regolo, deve consentire la segnatura di due tacche a distanza di un metro ed è quindi soggetto a dilatazioni termiche, vibrazioni, problemi di planarità e parallelismo, etc. Del resto i campioni primari vengono utilizzati rarissimamente: la quasi totalità delle misurazioni tecniche e scientifiche non richiede quella riproducibilità garantita solo dal campione primario.

Sistema Internazionale di unità di misura SI: norma CNR-UNI 10003

sistema coerente basato su 7 unità fondamentali:

grandezza [simbolo[7]]	**unità**	**simbolo dell'unità**
lunghezza [L]	metro	m
massa [M]	chilogrammo	kg
tempo [T]	secondo	s
corrente elettrica [I]	ampere	A
temperatura termodinamica [θ]	kelvin	K
quantità di sostanza	mole	mol
intensità luminosa	candela	cd

Campioni delle unità di misura del SI:

lunghezza: metro (m)

Lunghezza del tragitto compiuto dalla luce nel vuoto in un intervallo di 1/299 792 458 di secondo

Prima dell'attuale definizione (XVII Conferenza Generale Pesi e Misure –1983) che è parte integrante del S.I. il metro ha avuto le seguenti definizioni:

- **quarantamilionesima parte del meridiano terrestre** (più precisamente la decimilionesima parte della distanza fra il polo della Terra e l'equatore lungo il meridiano passante per Parigi) - la definizione di Laplace-Lagrange risale al 1791)
- **distanza fra due incisioni su di una sbarra di platino-iridio** (conservata nel Bureau International des Poids et Mesures a Sèvres, presso Parigi). La definizione, adottata nel settembre 1889 dalla Prima Conferenza Internazionale di Pesi e Misure, scaturì dalla necessità di fare riferimento a campioni concreti. La riproducibilità di questo campione era di 0,2 μm/m = 2×10^{-7}
- **lunghezza pari a 1 650 763,73 lunghezze d'onda nel vuoto della riga rosso-arancio del kripton 86.** La definizione (XI CGPM - 1960) è parte integrante del vecchio sistema M.K.S.A (La riproducibilità di questo campione era di 1 nm/m = 10^{-9})

La definizione del metro campione di lunghezza si basa sulla costanza della velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto. Nel S.I. tale velocità viene assunta per definizione c = 299 792 458 m/s. La riproducibilità del campione di lunghezza coincide, quindi, con quella del campione del secondo $\Delta L/(L_{metro}) = \Delta T/(T_{secondo}) = 10^{-12}$

massa: chilogrammo (kg)

Massa del prototipo internazionale conservato al Pavillon de Breteuil (Sèvres - Francia)

La definizione (III CGPM – 1901) si riferisce a un cilindro di platino – iridio (90%-10%) alto circa 39 mm e di diametro circa 39 mm. Per il suo utilizzo (confronto con prototipi di campioni

[7] Per i simboli delle grandezze fisiche non esiste una convenzione; siete liberi di scegliere la notazione che preferite facendo però molta attenzione: ad esempio con [L] si può indicare una lunghezza ma anche lavoro, momento angolare, induttanza ...

secondari) viene impiegata una bilancia (della portata di un chilogrammo) sensibile ai 10 μg che garantisce una riproducibilità $\Delta M/(M_{chilogrammo}) = 10\ \mu g/1\ kg = 10^{-8}$.
Quello di massa è il campione di unità di misura del S.I. più antico. Si attende una minore incertezza nella determinazione del numero di Avogadro (N = 6,022 045 x 10^{23} mol^{-1}) per definire un nuovo campione di massa.

tempo: secondo (s)

Durata di 9 192 631 770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione fra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo del cesio 133

Prima dell'attuale definizione del secondo (XIII CGPM – 1967) le precedenti si basavano sulla periodicità del moto terrestre:

- **86400-esima parte del giorno solare medio**, cioè della media sulla base di un anno del **giorno solare**, inteso come intervallo di tempo che intercorre tra due successivi passaggi del Sole sullo stesso meridiano (86 400 = 24 ore/giorno x 60 min/ora x 60 s/min)
- **secondo dell'effemeride** è 1/31 556 925,974 dell'**anno tropico 1900** (intervallo di tempo fra due **equinozi di primavera**).

Le due unità di misura del secondo erano coincidenti nel 1900, ma ora non lo sono più, a causa delle anomalie nella velocità di rotazione della Terra.
Successivamente la definizione si basò sull'**orologio ad ammoniaca** che sfrutta la costanza della frequenza delle vibrazioni dell'atomo[8] di azoto rispetto al piano degli atomi di idrogeno (23,87 GHz).

La riproducibilità del campione di secondo è $\Delta T/(T_{secondo}) = 10^{-12}$.

temperatura termodinamica: kelvin (K)

Frazione 1/273,16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua

(XIII CGPM – 1967)
Il punto termodinamico dove coesistono le tre fasi solida, liquida e gassosa dell'acqua è alla temperatura di –0,01 °C e alla pressione di 4,58 mm_{Hg}.
Con questa definizione l'acqua distillata solidifica, alla pressione atmosferica, a 0,01 K.
La riproducibilità del campione è $\Delta\theta/(\theta_{kelvin}) = 2 \times 10^{-7}$.

intensità di corrente elettrica: ampere (A)

Intensità di una corrente elettrica costante che, percorrendo due conduttori rettilinei, paralleli, di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile, posti alla distanza di un metro l'uno dall'altro nel vuoto, produrrebbe fra questi conduttori una forza pari a 2x10^{-7} N su ogni metro di lunghezza

(IX CGPM- 1948)
La definizione è astratta. Con le opportune precauzioni è tuttavia possibile approssimare sufficientemente le richieste di conduttori rettilinei, paralleli, di lunghezza infinita e sezione nulla della definizione: il campione è riproducibile a $\Delta I/(I_{kampere}) = 4 \times 10^{-6}$. Per altre grandezze elettriche (non fondamentali) sono disponibili campioni più riproducibili.

---

[8] Per questo motivo questi strumenti vengono detti orologi atomici: il loro periodo di oscillazione è legato ad una particolare vibrazione di un sistema atomico.

quantità di materia: mole (mol)

Quantità di materia di un sistema che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi in 0,012 kg di carbonio 12. Le entità elementari debbono essere specificate e possono essere atomi, molecole, ioni, elettroni, altre particelle, ovvero gruppi specificati di tali particelle

(XIV CGPM – 1971)

intensità luminosa: candela (cd)

Intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza 540 x 10^{12} Hz e la cui intensità energetica in tale direzione è 1/683W/sr

(XVI CGPM – 1979)
La frequenza di 540 THz corrisponde, nel vuoto, alla lunghezza d'onda λ = 555 nm (colore giallo) che è al massimo della sensibilità spettrale dell'occhio umano.

Unità derivate:

alcune unità derivate hanno nomi e simboli speciali; ad esempio:

grandezza derivata	unità di misura	simbolo	equivalenza
angolo piano	radiante	rad	1 rad = 1 m/m
angolo solido	steradiante	sr	1 sr = 1 m^2/m^2
frequenza	hertz	Hz	1 Hz = 1/s
forza	newton	N	1 N = 1 kg m/s^2
pressione	pascal	Pa	1 Pa = 1 N/m^2
energia, lavoro, calore	joule [9]	J	1 J = 1 N m
potenza	watt	W	1 W = 1 J/s
carica elettrica	coulomb	C	1 C = 1 A s
potenziale, f.e.m.	volt	V	1 V = 1 J/C
resistenza elettrica	ohm	Ω	1 Ω = 1 V/A
flusso magnetico	weber	Wb	1 Wb= 1 V s
induzione magnetica	tesla	T	1 T = 1 Wb/m^2
capacità elettrica	farad	F	1 F = 1 C/V
induttanza	henry	H	1 H = 1 Wb/A
flusso luminoso	lumen	lm	1 lm = 1 cd sr
illuminamento	lux	lx	1 lx = 1 lm/m^2

Prefissi per indicare multipli e sottomultipli:

femto	f	10^{-15}	peta	P	10^{+15}
pico	p	10^{-12}	tera	T	10^{+12}
nano	n	10^{-9}	giga	G	10^{+9}
micro	µ	10^{-6}	mega	M	10^{+6}
milli	m	10^{-3}	chilo	k	10^{+3}

[9] Si raccomanda la pronuncia "giul"

Notazioni:

Seguendo lo stile dei documenti I.S.O. per marcare la parte decimale di un numero viene utilizzata la virgola e non il punto.
Non può essere usato più di un prefisso.
Per le misure di massa i multipli e sottomultipli vanno riferiti al grammo e non al chilogrammo: mg per milligrammo e non µkg.
Occorre prestare attenzione nei casi in cui un prefisso può essere confuso con una unità; ad esempio:
mK = millikelvin; Km = kelvin x metro; km = chilometro; MK= megakelvin.
È opportuno scegliere i prefissi in modo da ottenere valori compresi fra 0,1 e 1 000.
In una tabella va usato un solo prefisso per colonna anche se i valori escono dall'intervallo compreso fra 0,1 e 1 000.

Unità non SI:

minuto (min) ora (h) giorno (d)
1 miglio nautico internazionale = 1 852 m
1 miglionautico/h = 1 knot = 0,514 444 m/s 1 km/h = 1/3,6 m/s
1 bar = 10^5 Pa
1 kWh = 3,6 MJ
1 Ah = 3,6 kC
1 t (tonnellata)= 1 000 kg

Unità non SI da evitare (anche se ancora di uso comune)

1" (1 inch) = 25,4 mm 1 ft = 12" = 0,304 8 m 1 yd = 3 ft = 0,914 4 m
1 kg_f (chilogrammo forza) = 1 kg_p (chilogrammo peso) = 9,806 65 N
1 atm (atmosfera standard) = 101,325 kPa = 1,013 25 bar
1 at (atmosfera tecnica) = 98,066 5 kPa = 0,980 665 bar
1 mmHg = 1 Torr = 1,333 22 mbar = 133,322 Pa
1 cal = 4,186 8 J 1 Cal = 4,186 8 kJ
1 HP = 735,498 75 W 1 CV = 75 kgm/s 1 kgm/s = 9,806 65 W

Sistemi di unità di misura diversi dal S.I.

c.g.s. meccanico tecnico

sistema non coerente né completo

5 grandezze fondamentali:

LUNGHEZZA	centimetro	cm
MASSA	grammo	g
TEMPO	secondo	sec[10]
TEMPERATURA	grado Celsius	°C [11]
CALORE	caloria	cal [12]

c.g.s. elettrostatico

sistema non coerente

3 grandezze fondamentali:

LUNGHEZZA	centimetro	cm
MASSA	grammo	g
TEMPO	secondo	sec

Si definisce la carica elettrica come grandezza derivata dalla legge di Coulomb $F = k\frac{q_1\, q_2}{r^2}$ e dalla convenzione di coordinazione che nel vuoto pone k = 1 e adimensionale.

c.g.s. elettromagnetico

sistema non coerente

3 grandezze fondamentali:

LUNGHEZZA	centimetro	cm
MASSA	grammo	g
TEMPO	secondo	sec

Si definisce la corrente elettrica come grandezza derivata dalla legge di attrazione o repulsione tra due fili paralleli $F = k\, I_1\, I_2 \frac{1}{d}$ e dalla convenzione di coordinazione che nel vuoto pone k = 2 e adimensionale.

sistema tecnico (S. T.)

sistema non coerente e non assoluto

5 grandezze fondamentali:

LUNGHEZZA	metro	m
TEMPO	secondo	sec
PESO [13]	chilogrammo peso	kg_p
TEMPERATURA	grado Celsius	°C
CALORE	Caloria	Cal [14]

---

[10] **notare il simbolo "sec" al posto di "s" del Sistema Internazionale**

[11] °C: un centesimo dell'intervallo di temperatura compreso fra la temperatura di solidificazione (0 °C) e quella di ebollizione (100 °C) dell'acqua a 1 atmosfera e al livello del mare.
La differenza di temperatura di 1 K (kelvin) coincide con 1 °C (per le differenze di temperatura il SI tollera l'unità "grado centigrado")

[12] cal: quantità di calore necessaria per innalzare la temperatura di 1 g di acqua da 14,5 °C a 15,5 °C

[13] la massa è una grandezza derivata

[14] Cal: quantità di calore necessaria per innalzare la temperatura di 1 kg di acqua da 14,5 °C a 15,5 °C

TEORIA DELLA MISURA

Illustriamo alcuni concetti della teoria della misura con un esempio[15].

Si supponga di voler determinare la profondità di un pozzo gettando in esso un sasso[16].
Per ottenere una misura diretta della profondità dovremmo eseguire una serie di operazioni che porti al confronto di questa grandezza con l'unità di misura ad essa omogenea[17]. Alternativamente si può pensare a una misura derivata in cui si misura il tempo impiegato dal sasso per giungere in fondo al pozzo.

Seguiamo questa seconda strada: possiamo misurare con un cronometro[18] il tempo necessario affinché il sasso, lasciato cadere dall'imboccatura del pozzo, raggiunga il fondo. A questo punto abbiamo bisogno di una relazione fra la profondità del pozzo e il tempo impiegato dal sasso per raggiungerne il fondo. Questa relazione deve essere nota con almeno la stessa accuratezza che richiediamo alla nostra misura.

Dobbiamo quindi creare un modello della realtà, analizzarlo dal punto di vista delle leggi fisiche e infine tradurlo in relazioni matematiche.
Una prima schematizzazione potrebbe consistere nel considerare la caduta del sasso come se avvenisse nel vuoto. In questo caso dall'equazione del moto si otterrebbe:

$$h = \tfrac{1}{2} g\, t^2 \qquad (1)$$

in cui "h" rappresenta la profondità incognita del pozzo, "$g = 9{,}8\ m/s^2$" l'accelerazione di gravità e "t" il tempo misurato direttamente con un cronometro.

La misurazione si svolgerebbe nel seguente modo[19]: il misuratore lascia cadere il sasso mentre fa partire il cronometro; quando sente il tonfo del sasso nell'acqua arresta il cronometro; l'indicazione del cronometro rappresenterà il tempo "t" da introdurre nella relazione (1).

Ci aspettiamo di trovare un solo valore[20] dal quale ricavare esattamente la profondità cercata? Se ripetessimo più volte la misurazione otterremmo una serie di misure di tempo simili tra loro ma non coincidenti. Ciò può essere dovuto a diversi motivi:

- non perfetto sincronismo fra il momento del rilascio del sasso e l'inizio del conteggio da parte del cronometro dovuto al ritardo dei riflessi del misuratore
- non perfetto sincronismo fra il momento in cui viene percepito il tonfo del sasso e l'istante in cui viene arrestato il cronometro
- velocità iniziale del sasso non nulla.

---

15 L'esempio ha validità puramente didattica. All'interno di questo corso la fase preparatoria delle misurazioni da svolgere in laboratorio non viene delegata allo studente. È però istruttivo e consigliato provare ad immaginare alcuni esempi di misurazione ed analizzarli nei termini descritti in queste note

16 La profondità del pozzo è il **misurando.** Stiamo definendo il **metodo di misurazione**: lanciamo un sasso (misura derivata) anziché adoperare un regolo (misura diretta)

17 Dovendo adottare il Sistema Internazionale, l'unità di misura della profondità (omogenea ad una lunghezza) è il metro. Ovviamente non ricorreremmo al confronto diretto col campione (cosa peraltro impossibile poiché in questo caso si tratta di una definizione) ma con un regolo che riporti delle incisioni (tacche) la cui distanza è determinata a partire dalla definizione del campione primario o più realisticamente da un campione secondario.

18 Il funzionamento del cronometro si basa su un oscillatore il cui periodo è in relazione nota con il campione di unità di misura del tempo.

19 Stiamo definendo la **procedura di misurazione**

20 Tale valore è detto **valore vero**. Poiché la definizione del misurando non può esssere infinitamente precisa, possono esistere più valori veri.

Questo tipo di cause porta a valori diversi fra una misura e la successiva; esse producono effetti di piccola entità che però non sono né riproducibili, né prevedibili perché variano casualmente. Vengono chiamate **errori casuali**.

Gli errori[21] sono la differenza fra il risultato di una misura e il valore vero cercato.

Per eliminare questa non riproducibilità si può agire in tre direzioni a seconda del risultato che si vuole ottenere:
- se non è importante distinguere, p.es., fra una profondità di 10 metri e una di 11 metri si può utilizzare un cronometro in grado di apprezzare solo i decimi di secondo. La scarsa sensibilità dello strumento maschererà l'effetto degli errori casuali
- se è possibile eseguire molte misure nelle stesse condizioni si possono utilizzare metodi statistici[22] per ridurre l'effetto degli errori casuali
- se si possono effettuare solo poche misurazioni, o al limite una sola, è necessario cambiare strumentazione[23], p.es. si può utilizzare un cronometro elettronico attivato dallo sblocco di un elettromagnete che lascia cadere il sasso con velocità nulla e si arresta quando il suono del tonfo arriva a un microfono.

È però illusorio pensare di poter eliminare del tutto gli errori casuali modificando la strumentazione: il cronometro, per quanto sensibile, non sarà mai in grado di apprezzare intervalli temporali inferiori al periodo del suo oscillatore interno, i dispositivi elettromeccanici risentono delle vibrazioni, la smagnetizzazione non è istantanea, i dispositivi elettronici sono disturbati dai campi elettromagnetici , etc.

La presenza degli errori casuali viene facilmente evidenziata ripetendo più volte la misurazione nelle stesse condizioni: se la sensibilità della strumentazione lo consente, si otterranno valori non coincidenti fra loro; lo scarto fra i valori delle varie misure è indice dell'entità degli errori casuali presenti nella misurazione.

Esiste però un'altra serie di cause che possono alterare il risultato della misura e produrre valori che si discostano da quello teorico:
- la formula (1) non considera l'attrito con l'aria
- non si tiene conto della velocità finita della propagazione del suono
- il cronometro può anticipare o ritardare

Le prime due cause conducono a misure di tempo superiori a quelle che si otterrebbero se la (1) descrivesse correttamente il fenomeno; la terza produrrebbe risultati maggiori o minori di quelli corretti a seconda della disfunzione dello strumento. Queste cause appartengono però a una categoria diversa da quella degli errori casuali: l'entità e il verso della variazione rimangono inalterati fra una misura e la successiva; si parla in questo caso di **errori sistematici**.

Contrariamente agli errori casuali, quelli sistematici possono, almeno in linea teorica, essere eliminati cambiando la strumentazione e/o il metodo di misura se questo altera i risultati delle misure o apportando correzioni numeriche al risultato ottenuto. Purtroppo non sono di facile individuazione proprio perché **non si evidenziano ripetendo la misurazione nelle stesse condizioni**. In questo caso per rivelarne la presenza occorre o studiare più a fondo il fenomeno per averne un modello e quindi una rappresentazione matematica più accurata, oppure si deve ripetere

---

[21] Nel campo della teoria della misura la parola "errore" non ha una connotazione negativa non essendo sinonimo, ad esempio, di "sbaglio".

[22] Il più noto consiste nel calcolare la media aritmetica della serie di risultati: i valori in eccesso tenderanno a compensarsi con quelli in difetto riducendo l'effetto degli errori casuali. Nel seguito del corso approfondiremo questa metodologia

[23] In questo caso variano anche la definizione del misurando, il metodo di misurazione e la procedura della misurazione

la misurazione in condizioni diverse, p.es. cambiando lo sperimentatore o la strumentazione o il principio fisico sul quale si basa la misura, etc.

Non si deve pensare che la distinzione fra errori casuali ed errori sistematici sia così netta. Ad esempio nell'azionare il cronometro in corrispondenza del verificarsi di un qualche evento, a causa della lentezza dei nostri riflessi, l'azione avverrà sempre in ritardo (errore sistematico) ma varierà anche leggermente da una prova alla successiva (errore casuale).

Data l'impossibilità di conoscere i valori veri (occorrerebbe effettuare delle misure senza errore ...) il concetto di errore è qualitativo; nell'elaborazione dei risultati di misurazioni si ricorrerà alle incertezze, quantità statistiche descrivibili in modo oggettivo.

DEFINIZIONI

Il *Comité International des Poids et Mesures* (**CIPM**), la più alta autorità mondiale in metrologia ha chiesto al *Bureau International des Poids et Mesures* (**BIPM**) di produrre una procedura accettata a livello internazionale per esprimere l'incertezza delle misure [24].

Tale compito è stato istruito dall'*International Organization for Standardization* (**ISO**) che meglio rappresenta le necessità delle industrie e del commercio e dalle organizzazioni che partecipano ai lavori dell'ISO: l'*International Electrotechnical Commission* (**IEC**) partner dell'ISO nella standardizzazione mondiale; il CIPM e l'*Organisation Internationale de Metrologie Légale* (**OIML**) organizzazioni mondiali nella metrologia; l'*International Union of Pure and Applied Chemistry* (**IUPAC**), l'*International Union of Pure and Applied Physics* (**IUPAP**) e l'*International Federation of Clinical Chemistry* (**IFCC**).

Seguono alcune note e definizioni, ricavate in gran parte dalle norme DIN, che sono state adattate ai contenuti del corso.

MISURAZIONE E MISURA

Misurazione:

insieme di operazioni che portano alla determinazione del valore del **misurando**, cioè il valore della grandezza fisica da misurare. Una misurazione inizia quindi con la specificazione appropriata del misurando, del **metodo di misurazione** e della **procedura di misurazione**.

Misura:

valore del misurando ottenuto in seguito a una misurazione. Essa è espressa come una unità di misura moltiplicata per un numero:

[24] Cosí come l'uso dell'*International System of Units* (**SI**) ha portato alla coerenza in tutte le misurazioni tecniche e scientifiche, in quest'epoca di mercato globale occorre un consenso mondiale sulla valutazione ed espressione dell'incertezza affinché sia possibile confrontare misure effettuate in nazioni diverse.

p.es. : lunghezza di una sbarra: 5,34 m; massa di un corpo: 0,152 kg; quantità di sostanza di un campione di acqua: 0,012 mol
I valori possono essere positivi, negativi o zero.
I valori di grandezze di dimensione 1 sono generalmente espressi come numeri puri (p.es. un'eccezione: 0,17 sr).
L'unità di misura deve essere sempre espressa in quanto parte integrante della misura.

Definizione del misurando:

il misurando deve essere definito con sufficiente completezza, rispetto all'accuratezza richiesta, affinché per tutti gli scopi pratici il valore associato con la sua misurazione sia unico.
Se, come esempio, la lunghezza di una sbarra di acciaio lunga nominalmente 1 m deve essere determinata con l'accuratezza di 1 µm, occorre che vengano specificate sia la temperatura che la pressione; se l'accuratezza richiesta è 1 mm non è necessario esprimere tali condizioni di misura.

Valore vero:

valore consistente con la definizione di una particolare grandezza data.
Questo è il valore si otterrebbe da una misurazione perfetta; pertanto i valori veri non sono determinabili.
Possono esserci più valori veri consistenti con una particolare definizione se questa non è sufficientemente dettagliata rispetto all'accuratezza della misurazione.

Metodo di misurazione:

può essere diretto se il valore del misurando è ottenuto mediante l'uso di uno strumento atto alla misurazione della grandezza fisica del misurando; è indiretto se il risultato è espresso in termini dei valori di altre grandezze essendo nota la relazione fra queste e il misurando.
Molti fenomeni fisici possono essere utilizzati in una misurazione; p.es. per misurare lunghezze si possono utilizzare: interferenza luminosa, variazione di capacità elettrica; per temperature: la dilatazione termica, l'effetto termoelettrico, la variazione di resistenza elettrica; per la forza: la deformazione elastica, l'accelerazione; per l'intensità di corrente: l'effetto Joule, effetti elettromagnetici.

Risultato di una misurazione:

valore attribuito al misurando in seguito a una misurazione. Esso è solo un'approssimazione o stima del valore del misurando ed è quindi completo solo quando venga accompagnato dall'incertezza di quella stima.
Riportando il risultato di una misurazione deve essere chiaro se è stata o meno effettuata una correzione per errori sistematici e se è stata eseguita una media aritmetica di più valori.
In molti casi il risultato di una misurazione è determinato da una serie di osservazioni ottenute in condizioni di ripetibilità. Eventuali variazioni dei risultati di osservazioni ripetute vengono attribuite al fatto che sono variate le grandezze influenti.

ERRORI, EFFETTI E CORREZIONI[25]

Errori di misura e loro cause:

L'errore è il risultato di una misurazione meno un valore vero del misurando. Esso è un concetto idealizzato perché gli errori non possono essere conosciuti esattamente in quanto non sono noti i valori veri; in pratica si usa al suo posto un valore convenzionale che è la stima dell'incertezza.

Ogni valore misurato è influenzato da imperfezioni dello strumento, del metodo di misura, dell'oggetto cui appartiene il misurando, dell'ambiente e dell'osservatore; queste influenze possono anche variare nel tempo. Infine ci possono essere sbagli commessi dall'osservatore inesperto che si supporranno inesistenti (ma gli studenti sono per definizione degli inesperti in questo campo a meno che non abbiano precedentemente acquisito esperienza nel campo delle misurazioni).

Esistono molte cause possibili dell'errore di una misurazione:
- definizione incompleta del misurando
- realizzazione imperfetta della definizione del misurando
- insieme di dati misurati non rappresentativo del misurando
- conoscenza inadeguata delle condizioni ambientali o dei loro effetti sulla misurazione
- valutazione soggettiva nella lettura di strumenti analogici
- risoluzione della strumentazione insufficiente
- valori inesatti delle costanti e dei parametri ottenuti da sorgenti esterne
- assunzioni ed approssimazioni utilizzate
- variazioni delle osservazioni ripetute non identificate

L'errore viene scomposto in una componente casuale e una sistematica.

Errori casuali

L'errore casuale è pari all'errore meno l'errore sistematico. Il suo valore non può essere conosciuto esattamente perché non è noto il valore vero.

Gli errori casuali provengono da impredicibili variazioni temporali e spaziali delle grandezze influenti. Sebbene non sia possibile compensare completamente gli errori causali, il loro effetto può essere ridotto aumentando il numero di osservazioni e calcolando la media aritmetica di un numero sufficientemente elevato di misure: l'errore casuale è il risultato di una misurazione meno la media che si potrebbe ottenere da un numero infinito di misurazione del misurando sotto condizioni di ripetibilità.

La deviazione standard sperimentale della media aritmetica di una serie di misurazioni non è l'errore casuale della media ma una misura dell'incertezza della media dovuta ad effetti casuali.

---

[25] Il concetto di incertezza come attributo quantificabile è stato introdotto recentemente anche se la teoria degli errori è stata a lungo parte della teoria e pratica della misura. Oggi è accettato il fatto che **quando tutte le componenti note o sospette dell'errore siano state valutate e corrette, rimanga sempre un'incertezza circa la correttezza del risultato ottenuto.**

Errori sistematici

L'errore sistematico è pari all'errore meno l'errore casuale. Il suo valore non può essere conosciuto esattamente perché non è noto il valore vero.

Gli errori sistematici producono variazioni di verso e entità costanti al ripetersi delle misurazioni; non possono essere eliminati ma spesso possono essere ridotti: se viene identificato un effetto sistematico esso può essere quantificato e, se esso è significativo per l'accuratezza richiesta, si può applicare una correzione numerica per compensarne l'effetto o procedere con un nuova misurazione in condizioni di non riproducibilità.

L'errore sistematico è la media che si potrebbe ottenere da un numero infinito di misurazioni del misurando sotto condizioni di ripetibilità meno il valore vero del misurando. L'errore sistematico può essere evidenziato se non si osservano condizioni di riproducibilità.

Si assume che il risultato di una misurazione sia stato corretto per tutti gli effetti sistematici significativi noti e che sia stato compiuto ogni sforzo per identificarli e che, dopo la correzione, il valore atteso dell'effetto sistematico corretto sia nullo.
Dopo la correzione degli effetti sistematici, il risultato di una misurazione è tuttavia solo una stima del valore del misurando.

Correzione/fattore correttivo

valore che va sommato algebricamente/moltiplicato per il risultato per compensare l'errore sistematico; la compensazione non può essere completa in quanto non è noto l'errore.

Condizioni di ripetibilità:

esistono quando lo stesso osservatore effettua misure della stessa grandezza fisica usando lo stesso metodo di misura e gli stessi strumenti nelle stesse condizioni ed in un breve intervallo di tempo.
Le variazioni di osservazioni ripetute vengono attribuite al fatto che sono variate grandezze influenti.

Grandezza influente:

grandezza diversa dal misurando che influisce sul risultato di una misurazione; p.es.: la temperatura di un micrometro o la frequenza di una tensione alternata.

Condizioni di riproducibilità:

possono esistere quando diversi osservatori eseguono misure di una stessa grandezza fisica (opportunamente definita) utilizzando lo stesso metodo di misura ma strumenti diversi e in luoghi e tempi diversi. Il confronto dei risultati ottenuti sotto condizione di riproducibilità può evidenziare la presenza di effetti sistematici non determinabili da ciascun osservatore separatamente.

INCERTEZZA

> ***Riportando il risultato di una misura è obbligatorio fornire qualche indicazione quantitativa della qualità del risultato affinché i suoi utilizzatori possano stabilirne l'affidabilità.***
> ***Senza tale indicazione i risultati delle misure non possono essere confrontati né fra di loro né con valori di riferimento.***

Errore ed incertezza non sono sinonimi ma due concetti diversi: il primo è qualitativo perché si basa sul valore vero che non è noto; il secondo è quantitativo perché si basa sui valori dei risultati delle misurazioni.

Quando tutte le componenti note o sospette dell'errore siano state valutate e corrette, rimane sempre un'incertezza circa la correttezza del risultato ottenuto.

L'incertezza comprende in generale diverse componenti; alcune possono essere valutate statisticamente (**incertezze di tipo A**); altre vengono valutate assumendo distribuzioni di probabilità assunte sulla base dell'esperienza o di altre informazioni (**incertezze di tipo B**).
Le componenti della categoria A sono caratterizzate dalle stime delle varianze σ^2 o delle deviazioni standard σ e dal numero di gradi di libertà ν.
Le componenti della categoria B devono essere caratterizzate da quantità che possono essere considerate approssimazioni delle corrispondenti varianze (la cui esistenza è assunta); analogamente per le approssimazioni delle deviazioni standard.

L'incertezza viene generalmente espressa dal parametro statistico deviazione standard (o un suo multiplo).
L'incertezza standard del risultato di una misurazione derivata ottenuto dai valori di altre grandezze è detta **incertezza standard combinata**. La corrispondente deviazione standard stimata è pari alla radice quadrata della varianza combinata ottenuta dalle varianze delle varie componenti (legge di propagazione delle incertezze).

Una scienza è esatta nel limite in cui riesce a determinare l'incertezza dei suoi risultati

TABELLE E GRAFICI

La potenza del metodo dei minimi quadrati ha lo svantaggio di richiedere il calcolo di formule che potrebbero distogliere l'attenzione degli studenti dagli scopi del corso: durante le esperienze ritengo che in laboratorio sia più importante concentrarsi sul metodo sperimentale che non sul rigore dell'elaborazione statistica dei dati. Tuttavia in laboratorio è anche di importanza fondamentale avere rapidamente una valutazione, anche se rozza, della qualità dei dati che si stanno raccogliendo.
Inoltre non è raro che si commetta uno sbaglio nell'immettere un dato nello strumento di calcolo ottenendo un risultato sbagliato. Sarebbe utile poter verificare rapidamente se il risultato è approssimativamente corretto; a questo punto sarà più affidabile considerare corretto il risultato calcolato.

Segue la discussione di un metodo approssimativo che consentirà di ottenere tali informazioni mediante pochissimi calcoli; durante la stesura della relazione ci sarà poi tempo a sufficienza per elaborare rigorosamente i risultati.

Per fissare le idee consideriamo un esempio: supponiamo di avere eseguito una serie di misure di allungamenti Y_i di una molla sottoposta a sollecitazioni crescenti mediante l'aggiunta di pesetti di massa X_i su un piattello.
Molto probabilmente gli allungamenti Y_i avranno le stesse incertezze perché per misurarli sarà stato utilizzato lo stesso strumento e lo stesso metodo di misura.

INIZIAMO COL RIPORTARE LE MISURE

TABELLE

Il modo più razionale di riportare molti dati è in forma di tabella perché permette confronti per colonne e/o righe, controlli di coerenza, di tendenze, etc.
Alcune raccomandazioni dettate in parte dalle convenzioni e in parte dalla praticità nell'uso:

- **ogni misura va riporta con l'unità di misura e col corretto numero di cifre significative**:
  se si tratta di misure dirette:
  fino al decimo di divisione per letture di strumenti analogici;
  tutte le cifre per letture di strumenti digitali
  riportando anche gli eventuali zeri terminali
  se si tratta di misure derivate:
  se è stata già valutata l'incertezza
  lo stesso numero di cifre decimali dell'incertezza riportata con due cifre significative
  se non è stata ancora valutata l'incertezza
  un numero sufficiente di cifre significative che non richieda successivamente la ripetizione dei calcoli (ma senza esagerare[11])
- indicazioni ausiliarie comuni a tutti i dati di una colonna (p.es. 10^n o l'unità di misura) vanno riportate sull'intestazione: non devono ingombrare la tabella;
- evitare colonne di dati uguali; ricordarne l'esistenza in legenda;
- conviene impostare le tabelle in forma aperta (possibilità di aggiungere colonne/righe).
- evidenziare eventuali dati non graficati motivandone l'esclusione;

[11] difficilmente in laboratorio avrete a che fare con incertezze inferiori allo 0,1 % che implica al più 5 cifre significative

È **particolarmente importante** che almeno i dati graficati siano riportati in una tabella. In questo modo le informazioni per realizzare il grafico andranno prese dalla tabella e non ricercate all'interno della relazione. Inoltre, anche se non strettamente necessarie per la realizzazione del grafico, è importante che nella tabella compaiano anche le incertezze delle grandezze graficate: se un punto risultasse non allineato sarebbe assai rapido verificare se la discordanza è compatibile con l'incertezza della misura o è sinonimo di qualche altro effetto.

GRAFICHIAMO LA SERIE DELLE N COPPIE DI MISURE Y_I IN FUNZIONE DI X_I

GRAFICI

Anche se per la realizzazione professionale di un grafico è consigliabile l'utilizzo di opportuni programmi di calcolo e grafica, è fondamentale una fase di apprendimento che non può prescindere dalla loro realizzazione manuale. Per questo scopo sono a disposizione fogli di carta con divisioni ogni millimetro (carta millimetrata). Per il loro uso si consiglia:

- le scale sugli assi devono essere scelte in modo da **garantire la leggibilità delle coordinate di un qualsiasi punto** posto sul grafico (anche diverso dai punti risultati di misure);
- **non è indispensabile che il grafico si estenda a tutto il foglio** ma deve risultare leggibile
- per praticità d'uso le scale devono essere **multiple di 1, 2, 5 millimetri** (evitare, se possibile, 4; MAI 3, 7, 9 o valori che richiedano una calcolatrice)
- se non richiesto dal particolare problema in esame non è necessario che le scale inizino dall'origine
- ogni asse deve riportare il **simbolo della grandezza**, l'**unità di misura**, l'eventuale fattore 10^n
- su ogni asse vanno riportate a intervalli regolari poche (5-10) tacche con l'indicazione del valore: dato che il foglio è millimetrato non va riportata sul foglio la scala
- per non rendere difficoltosa ogni successiva elaborazione **non riportare sugli assi i valori delle misure** e **non collegare i punti** tra loro o con gli assi
- è utile[12] riportare sul grafico la relazione (titolo del grafico) che ci si attende occorrere fra le quantità riportate sugli assi

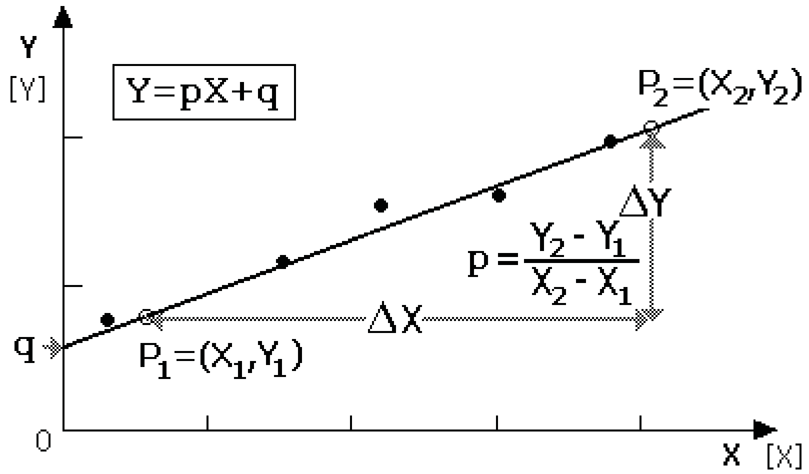
Graficata la serie si può tracciare con un righello la retta che secondo noi è mediamente equidistante da tutti i punti graficati. Poiché gli N punti su questo grafico rappresentano delle misure (quindi affette da errori) la retta (funzione analitica) non passa per tutti i punti sperimentali neanche se la nostra schematizzazione della legge fisica è corretta.
Dopo qualche tentativo si è però in grado di tracciare una retta che **non si discosta**[13] **per più di qualche percento da quella ottenibile mediante il metodo dei minimi quadrati** che si basa sullo stesso principio della minimizzazione[14] delle distanze.

[12] si tratta di un eufemismo: è obbligatorio (all'interno di questo corso, per fini didattici) perché consente di comprendere rapidamente il significato fisico del grafico. In questo corso ci limitiamo a studiare relazioni lineari. Non è una grossa limitazione dato che è spesso possibile trasformare relazioni non lineari in lineari (linearizzazione) graficando sugli assi opportune funzioni delle grandezze misurate

[13] sarebbe molto istruttivo se provaste a verificare quanto detto

[14] non è esattamente la stessa minimizzazione per due motivi, sapete individuarli ?

Un grafico delle N coppie di misure si presenterebbe così dopo aver tracciato la retta: **Y = p X + q** della quale per il momento ancora non sono noti i valori di **p** e **q**[15]



STIMA DEI PARAMETRI DELLA RETTA

A questo punto non resta che determinare il valore della pendenza[16] **p** e dell'intercetta **q**.

Per la pendenza **p** si prendono due punti sulla retta quanto più distanti possibile al fine di minimizzare l'effetto degli errori di lettura delle coordinate dal grafico.

Evidenziate, ad esempio cerchiandoli, i due punti e riportate i valori delle coordinate $[x_1, y_1]$ e $[x_2, y_2]$ (con le unità di misura!) al fine di calcolare la pendenza come rapporto[17] fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse: **p** = $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

L'intercetta **q** si legge direttamente dal grafico: **q = Y(X=0)**.

Per quel che riguarda il **calcolo delle incertezze** ...

Il metodo grafico per la stima dei parametri ottenuti consente di non utilizzare le formule dei minimi quadrati ma per stimare l'incertezza dei parametri ciò non è in generale evitabile. Tuttavia, se è sufficiente un'elaborazione approssimativa, si può snellire il calcolo. La prima approssimazione consiste nel considerare, se ragionevole, le incertezze tutte uguali fra loro (ma incognite dato che spesso delle grandezze non è nota l'incertezza). Le formule da utilizzare diventano quindi[18]:

$$\sigma_{p_S} = \frac{\sigma_s(Y)}{\sqrt{N}\,\sigma_X} \qquad \sigma_{q_S} = \frac{\sigma_s(Y)}{\sqrt{N}\,\sigma_X}\sqrt{\sigma_X^2 + \overline{X}^2}$$

dove

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{N}} \qquad \sigma_s(Y) = \sqrt{\frac{\sum \left[Y_i - (p_S X_i + q_S)\right]^2}{N-2}}$$

---

15 da questo momento in poi va dimenticata l'esistenza dei singoli punti: la migliore rappresentazione del fenomeno studiato è la retta che è stata tracciata

16 analiticamente si parla di coseni direttori o di coefficienti angolari ma in questo caso c'è da notare che sugli assi sono riportate unità di misura in generale diverse e addirittura di grandezze fisiche diverse. L'angolo che si potrebbe misurare con un goniometro cambierebbe se lo stesso grafico venisse ripetuto con scale diverse: tale angolo non ha nessuna relazione col significato fisico del parametro p. Per evitare confusione si preferisce parlare di pendenza (con dimensioni fisiche pari a quelle di Y/X).

17 la dimostrazione è banale … trovatela

18 vedi PROBABILITÀ

Con qualche passaggio, è possibile ottenere una diversa espressione di $\sigma_s(Y)$ che ne velocizza il calcolo: introdotta la quantità $\sigma_Y = \sqrt{\dfrac{\sum (Y_i - \overline{Y})^2}{N}}$ si ottiene $\sigma_s(Y) = \sqrt{\dfrac{N}{N-2}(\sigma_Y^2 - p_s^2\ \sigma_X^2)}$.

Ulteriori semplificazioni (quando applicabili):

1) spesso i punti sul grafico risultano pressoché equidistanti. Nell'esempio della sollecitazione di una molla è assai probabile che i pesetti siano uguali e che quindi i valori X_i siano uniformemente distribuiti fra un valore minimo X_m e uno massimo X_M. Allora è possibile considerare i valori X_i come determinazioni di una variabile aleatoria X distribuita uniformemente fra X_m e X_M e quindi: $\sigma_X = \dfrac{X_M - X_m}{\sqrt{12}}$ e $\overline{X} = \dfrac{X_M + X_m}{2}$

2) dato il significato di incertezza non è sempre fondamentale che questa sia quantificata esattamente; spesso è sufficiente conoscerne l'ordine di grandezza. In quest'ottica, dato che σ_Y quantifica lo scarto quadratico medio delle coordinate Y dalla retta tracciata, essa può essere stimata leggendo dal grafico considerando il massimo scarto d_M (positivo o negativo) e considerando che nel caso di una distribuzione uniforme $2\ d_M = \sqrt{12}\ \sigma_Y \rightarrow \sigma_Y = d_M / \sqrt{3}$.
Ovviamente quest'ulteriore approssimazione non è lecita qualora dal grafico non fosse possibile apprezzare d_M (punti perfettamente allineati, apparentemente).

RELAZIONI NON LINEARI

Si è accennato alla linearizzazione delle funzioni da graficare. Come esempio si consideri il moto di un pendolo matematico in cui

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

non è una relazione lineare fra le misure dirette T e L. Ci sono due alternative equivalenti: graficare T *vs* $\sqrt{L}$ o T^2 *vs* L. Ovviamente $\sqrt{L}$ o T^2 non sono più misure dirette: nella tabella che riporta i dati da graficare vanno riportati i loro valori e le loro incertezze.

Altro esempio: oscillazione di una molla di costante elastica K con appesa una massa $m + m_0$ (il contributo m può essere variato)

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{K}{m + m_0}}$$

In questo caso conviene calcolare i reciproci e quadrare:

$$\frac{T^2}{(2\pi)^2} = \frac{m + m_0}{K} \qquad \rightarrow \qquad T^2 = \frac{(2\pi)^2}{K}m + \frac{(2\pi)^2 m_0}{K}$$

da questo titolo risulta evidente che la pendenza $p = \dfrac{(2\pi)^2}{K}$ e l'intercetta $q = \dfrac{(2\pi)^2 m_0}{K}$

E come trasformare relazioni del tipo di: $T(t) = T_0\ e^{-\frac{t}{\tau}}$? In questo caso, passando ai logaritmi, si ottiene:

$$\ln[T(t)] = \ln(T_0) - t/\tau \qquad \text{cioè una retta con } p = -1/\tau \quad \text{e} \quad \text{intercetta } \ln(T_0)$$

ottenuta graficando le grandezze ln [T(t)] *vs* t

- Data la frequenza di studi di funzioni esponenziali è stata introdotta della carta in cui uno dei due assi riporta delle divisioni logaritmiche anziché lineari (carta semilogaritmica). In questo caso, **ANZICHÉ DOVER CALCOLARE I LOGARITMI DELLE QUANTITÀ IN ORDINATA, È SUFFICIENTE RIPORTARE L'ARGOMENTO DELLA FUNZIONE**; sulla scala lineare delle ascisse andrebbero invece riportati i tempi. Il particolare tipo di carta produrrebbe una presentazione logaritmica e quindi nell'esempio citato si visualizzerebbe una retta a pendenza negativa (senza ricorrere all'uso di una calcolatrice).

Utilizzando la carta semilogaritmica la generica relazione $Y = b\,e^{aX}$ verrebbe visualizzata come $\ln(Y) = \ln(b) + a\,X$ e la retta tracciata sul grafico avrebbe intercetta $q = \ln(b)$. Il valore del coefficiente b verrebbe quindi letto direttamente sulla scala che riporta gli argomenti della funzione logaritmo: $b = Y(X=0)$.
Presi sulla retta due punti di coordinate $P_1=[x_1;\ \ln(y_1)]$ e $P_2 = [x_2;\ \ln(y_2)]$ la pendenza verrebbe stimata da: $\mathbf{p} = \dfrac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{\ln(y_2/y_1)}{x_2 - x_1}$

- Esiste, fra le altre, anche un tipo di carta (doppio-logaritmica) con entrambi gli assi logaritmici per la rappresentazione di funzioni del tipo $Y = b\,X^a$ che verrebbero linearizzate passando ai logaritmi:

$$\ln(Y) = \ln(b) + a\ln(X)$$

In questo caso l'andamento lineare sarebbe fra le grandezze ln(Y) e ln(X) e la pendenza verrebbe ottenuta da $\mathbf{p} = \dfrac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{\ln(x_2) - \ln(x_1)} = \dfrac{\ln(y_2/y_1)}{\ln(x_2/x_1)}$ mentre l'intercetta si ricaverebbe da $\mathbf{b} = \ln[Y(X=1)]$.

●●● La linearizzazione delle funzioni è ovviamente valida sia per una rappresentazione grafica che per l'uso dei minimi quadrati.
In questo caso, pensando come esempio alla carta semilogaritmica, i dati da introdurre sarebbero le misure dirette X e quelle derivate ln(Y).
Sia per l'elaborazione grafica che per quella statistica mediante i minimi quadrati c'è da fare attenzione alle incertezze. Anche se la grandezza Y è misurata con lo stesso strumento e metodo e quindi ogni sua misura ha ragionevolmente la stessa incertezza consentendo l'uso delle formule semplificate, le misure, per esempio $\sqrt{L}$, T^2 o ln(Y), hanno incertezze diverse.
Tuttavia, sempre per il fatto che è spesso sufficiente una valutazione approssimata delle incertezze, è possibile utilizzare le formule con le incertezze uguali se queste distano fra loro per non più di un fattore due o tre.

ISTOGRAMMA

A volte può essere necessario rappresentare graficamente una sola variabile, per esempio per analizzare la distribuzione di frequenze di particolari grandezze (controllo di produzione). Analizziamo questo problema mediante il seguente esempio:

Con un cronometro digitale in grado di apprezzare i centesimi di secondo vengono effettuate 40 misure di periodi T che risultano essere (espresse in secondi):

1 -10:	1,80 1,71 1,74 1,90 1,78	1,72 1,69 1,70 1,73 1,73
11-20:	1,74 1,69 1,76 1,69 1,77	1,77 1,72 1,74 1,67 1,75
21-30:	1,79 1,79 1,71 1,77 1,83	1,81 1,73 1,75 1,71 1,76
31-40:	1,75 1,80 1,75 1,81 1,76	1,79 1,73 1,71 1,76 1,60

Elaborando questi dati si ottengono le quantità:

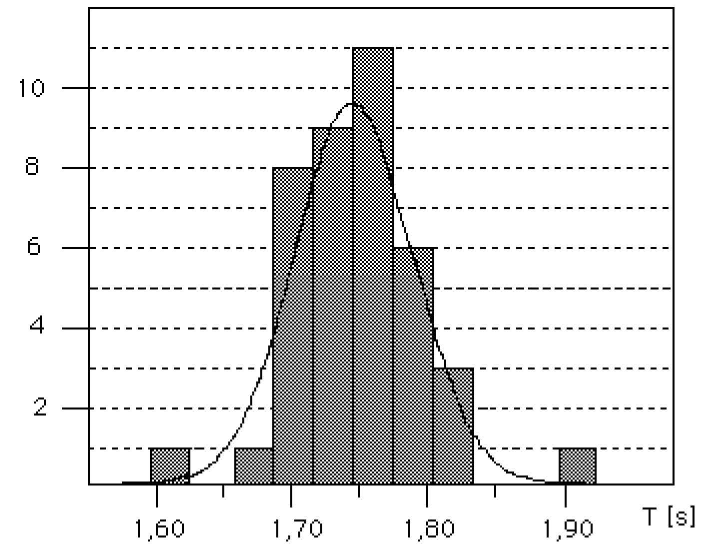
$$\overline{T} = \frac{\sum_{i=1,40} T_i}{40} = 1{,}748 \text{ s} \quad \text{e} \quad \sigma_s(T) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1,40} (T_i - \overline{T})^2}{40-1}} = 0{,}0508 \text{ s}$$

Organizziamo ora i dati in modo da ottenere una loro rappresentazione che possa fornire maggiori informazioni: raggruppiamo i dati in una dozzina circa di classi (se i dati fossero distribuiti secondo la curva di Gauss - cosa che accade spesso - la quasi totalità di misure cadrebbe in un intervallo largo circa 6 deviazioni standard; per una buona rappresentazione dei dati la larghezza di una classe dovrebbe essere pari a mezza deviazione standard).
Per far ciò consideriamo la differenza 1,90 s - 1,60 s = 0,30 s fra il massimo e il minimo valore misurati; ogni classe dovrebbe corrispondere quindi 0,30 s / 12 = 0,25 s che arrotondiamo a 0,30 s (in ogni classe ci saranno quindi 3 possibili valori). Otteniamo pertanto la tabella:

le misure sono espresse in secondi

# classe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
dal valore:	1,60	1,63	1,66	1,69	1,72	1,75	1,78	1,81	1,84	1,87	1,90
al valore:	1,62	1,65	1,68	1,71	1,74	1,77	1,80	1,83	1,86	1,89	1,92
valore centrale:	1,61	1,64	1,67	1,70	1,73	1,76	1,79	1,82	1,85	1,88	1,91
misure nella classe:	1	0	1	8	9	11	6	3	0	0	1

e da questa il grafico (istogramma o diagramma a bastoni) seguente:



A partire dai dati raggruppati in classi si ottengono i valori approssimati:

$$\overline{T} = \frac{\sum_{j=1,11} n_j T_j}{40} = 1{,}748 \text{ s} \quad \text{e} \quad \sigma_s(T) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1,11} n_j (T_j - \overline{T})^2}{40-1}} = 0{,}0507 \text{ s}$$

che, come si può notare coincidono con il calcolo esatto quando vengono applicate le convenzioni sul numero di cifre significative e decimali. Per questo motivo, una volta che sia stato effettuato un raggruppamento in classi, è più economico utilizzare i dati raggruppati per tutti i calcoli successivi.

L'istogramma di questo esempio consente di osservare l'andamento gaussiano delle misure; per confronto è riportata una gaussiana con m = 1,748 s e σ = 0,0507 s

TEST DI IPOTESI

Le espressioni ricavate precedentemente consentono di stimare su base statistica sia i riassunti di una distribuzione di probabilità come il valore atteso o la varianza, sia i parametri di un andamento funzionale (minimi quadrati).

Abbiamo introdotto anche gli elementi necessari per verificare la validità di alcune ipotesi. Ad esempio, considerando la distribuzione t-Student, è possibile quantificare la bontà dell'accordo fra la media aritmetica di una serie di misure e il valore atteso m. In questo caso lo scarto standardizzato:

$t = \dfrac{(\overline{X} - m)}{\sigma_S(\overline{X})}$ segue una distribuzione di Student con N-1 gradi di libertà.

Se effettivamente il campione di misure ottenuto rappresenta la grandezza fisica in esame, sotto l'ipotesi di distribuzione gaussiana degli errori casuali, il valore della variabile t è prevedibile su base statistica.

Operativamente:

- si stabilisce un livello di confidenza

- si fissa il corrispondente intervallo di confidenza per lo scarto t considerando che il numero di misure effettuate

- se il valore t ottenuto calcolando la quantità $\dfrac{(\overline{X} - m)}{\sigma_S(\overline{X})}$ cade all'interno dell'intervallo di confidenza prefissato l'esito del confronto è positivo (al livello di confidenza fissato)

CONFRONTO FRA MISURE

In generale, però, non è nota la distribuzione di probabilità delle variabili aleatorie che caratterizzano i risultati di misure, anche se spesso è approssimativamente gaussiana; ancor più spesso si esegue una sola misura e quindi non è possibile calcolare una deviazione standard.

Ciononostante è ancora possibile verificare l'attendibilità della misura ricorrendo alla disuguaglianza di Chebychev: indipendentemente dalla distribuzione di probabilità è raro (<10%) che la differenza fra il valore ottenuto e il valore vero sia superiore a tre volte la deviazione standard[19].

Questa considerazione ci permette di confrontare i risultati delle misure sia con valori di riferimento che fra di loro. Sono ovviamente possibili anche altri tipi di confronto quali lo scarto assoluto e relativo fra i valori . Esaminiamo i diversi casi:

---

19 vedi PROBABILITÀ: il livello di confidenza è maggiore di $1\text{-}1/t^2$; volendo aumentare la certezza del risultato andrebbe considerato un maggior numero di deviazioni standard. **Spesso, e in particolare all'interno di questo corso, si considera sufficiente un intervallo di confidenza pari a tre deviazioni standard**

CONFRONTO MISURA – VALORE

Si vuole confrontare la misura $X \pm \sigma$ con il valore m. Se la misura X fosse rappresentativa del valore vero m e σ stimasse correttamente l'incertezza associata alla misura allora:

lo **scarto** (assoluto) $\Delta = X - m$ dovrebbe essere "piccolo" (quanto?) $\rightarrow$ qualitativo

lo **scarto relativo** $\mathbf{s} = (X - m)/m$ dovrebbe essere "piccolo" (pochi %) $\rightarrow$ qualitativo

la **variabile t**[20] $\mathbf{t} = (X - m)/\sigma$ dovrebbe risultare $|t| < 3$ $\rightarrow$ quantitativo

CONFRONTO MISURA – MISURA

Se non è dato un valore di riferimento, per confrontare fra loro le misure Se non è dato un valore di riferimento per confrontare fra loro le misure $X_1 \pm \sigma_1$ e $X_2 \pm \sigma_2$ occorrerà, a seconda del tipo di confronto, stimare il valore m:

lo **scarto** (assoluto) $\Delta = X_1 - X_2$ dovrebbe essere "piccolo" (quanto?) $\rightarrow$ qualitativo

lo **scarto relativo** $\mathbf{s} = \dfrac{X_1 - X_2}{\overline{X}}$ dove $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$ è la migliore stima di m

dovrebbe essere "piccolo" (pochi %) $\rightarrow$ qualitativo

la **variabile t** in questo caso viene costruita considerando che la differenza $X_1 - X_2$ dovrebbe essere nulla e che la misura di $X_1 - X_2$ ha un'incertezza $\sigma(X_1 - X_2) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$:

$$\mathbf{t} = \frac{X_1 - X_2}{\sigma(X_1 - X_2)}$$ dovrebbe risultare $|t| < 3$ $\rightarrow$ quantitativo

Lo <u>scarto assoluto</u>, anche se a volte utile, richiede una certa "sensibilità" da parte di chi analizza i dati per riconoscere o meno la compatibilità fra le misure;

lo <u>scarto relativo</u>, rapportando lo scarto assoluto al valore vero (o alla sua migliore stima), è di più semplice uso: all'interno di una particolare applicazione, un valore percentuale particolarmente basso o elevato è di facile interpretazione anche se non considera anche gli effetti degli errori di misura che possono falsare i risultati;

la <u>variabile t</u> quantifica maggiormente il significato dello scarto fra le misure:

se $|t| < 3$ significa che lo scarto è compatibile con la presenza dei soli errori casuali (eventuali errori sistematici sono trascurabili rispetto a quelli casuali);
ripetendo più volte la/e misura/e è possibile ridurre, con le opportune medie aritmetiche, l'entità degli errori ed è possibile trovare una riduzione dello scarto.
Il confronto va considerato positivo e le misure compatibili (coincidenti)

se $|t| > 3$ significa che lo scarto non è compatibile con la presenza dei soli errori casuali (sono presenti errori sistematici non trascurabili);
ripetendo più volte la/e misura/e non è possibile ridurre, con le opportune medie aritmetiche, l'entità degli errori: lo scarto è significativo di una differenza fra i valori ottenuti..
Il confronto va considerato negativo e le misure non compatibili (diverse)

---

[20] non esiste una convenzione sul nome di questa grandezza: spesso si indica con z lo scarto standardizzato per una variabile gaussiana e con t una variabile di Student. Ho preferito mantenere questo nome per scopi mnemonici anche se, a rigore, è corretto solo nel caso di una media aritmetica di misure distribuite gaussianamente.

STIMA DELLE INCERTEZZE

Nel 1993 l'Organizzazione Internazionale per la Standardizzazione (ISO) ha pubblicato(*) una "Guida all'espressione dell'incertezza di misura" basata sulle raccomandazioni dell'Ufficio Internazionale di Pesi e Misure (BIPM). La Guida riassume i fondamenti teorici, le definizioni e le procedure elaborate dalle più autorevoli organizzazioni mondiali di metrologia:

BIPM	Bureau International de Poids et Mesures
IEC	International Electrotechnical Commission
IFCC	International Federation of Clinical Chemistry
ISO	International Organization for Standardization
IUPAC	International Union of Pure and Applied Chemistry
IUPAP	International Union of Pure and Applied Physics
OIML	International Organization of Legal Metrology

Aderiscono all'iniziativa anche altri istituti nazionali affiliati come, ad esempio:

DIN	(D)	Deutsches Institut fur Normung
NIST	(USA)	National Institute of Standards and Technology
UNI	(I)	Ente Italiano per l'Unificazione

1) *The uncertainty in the result of a measurement generally consists of several components which may be grouped into two categories according to the way in which their numerical value is estimated:*
A*: those which are evaluated by statistical methods*
B*: those which are evaluated by other means.*
There is not always a simple correspondence between the classification into categories A or B and the previously used classification into "random" and "systematic" uncertainties. The term "systematic uncertainty" can be misleading and should be avoided.

2) *The components in category A are characterized by the estimated variances or the estimated "standard deviations" and the number of degrees of freedom.*

3) *The components in category B should be characterized by quantities which may be considered as approximations to the corresponding variances, the existence of which is assumed.*

4) *The combined uncertainty should be characterized by the numerical value obtained by applying the usual method for the combination of variances. The combined uncertainty and its components should be expressed in the form of "standard deviations".*

5) *If, for a particular application, it is necessary to multiply the combined uncertainty by a factor to obtain an overall uncertainty, the multiplying factor used must always be stated.*

For estimate of an input quantity X_i *that has not been obtained from repeated observations, the standard uncertainty is evaluated by scientific judgement based on all the available information on the possible variability of* X_i*. The pool of information may include:*

- *previous measurement data;*
- *experience with or general knowledge of the behaviour and properties of relevant materials and instruments;*
- *manufacturer's specifications;*
- *data provided in calibration and other certificates;*
- *uncertainties assigned to reference data taken from handbooks.*

---

* International Organization for Standardization (ISO), "Guide to the expression of uncertainty in measurement", Geneva, Switzerland, 1993.

… inoltre …

*Lo scopo di ogni misurazione è la determinazione del valore vero di un misurando **M**. Le imperfezioni degli strumenti, le variazioni delle condizioni ambientali e l'influenza dell'osservatore (nonché i suoi sbagli) provocano errori di misura. Essi sono il motivo per cui non è possibile trovare il valore vero **M**.*

*Si assume che i valori x_i ottenuti da diverse misurazioni individuali di una serie di misurazioni altro non sono che le determinazioni di una variabile casuale **X**. Questa variabile aleatoria **X** obbedisce ad una distribuzione di probabilità caratterizzata in particolare da due parametri che sono il valore atteso **m** e la deviazione standard σ.*

*In assenza di errori sistematici il valore atteso **m** coincide col valore vero **M** del misurando. La deviazione standard σ è una misura della variabilità, per via dell'errore casuale, di un singolo valore misurato dal valore atteso del misurando.*

*I parametri **m** e σ della distribuzione di probabilità non sono generalmente noti. Il problema consiste nel determinare delle loro stime a partire da una serie di misurazioni. Usualmente per la stima di **m** si utilizza la media aritmetica $\overline{X}$ e per quella di σ si utilizza la deviazione standard sperimentale σ_s. Poiché i valori misurati sono realizzazioni di una variabile aleatoria, $\overline{X}$ fluttuerà statisticamente intorno a **m** e σ_s intorno a σ.*

*Sulla base delle assunzioni riguardanti il tipo di distribuzione (spesso si assumerà quella gaussiana) con l'aiuto dei valori $\overline{X}$ e $\sigma_s(\overline{X})$ è possibile determinare un intervallo di confidenza all'interno del quale è contenuto, con un livello di confidenza fissato, il valore **m**.*

Gli effetti noti degli errori sistematici vengono eliminati applicando correzioni. Per gli altri, sconosciuti, un approccio per la loro riduzione consiste nell'allargamento dell'intervallo di confidenza in base alle assunzioni applicabili al tipo di misurazione effettuata.

Adattato dalle norme DIN 1319 parte 3

… pertanto[23]:

l'incertezza da associare ad ogni misura può essere:

[23] ***anziché riportare accuratamente tutta la normativa relativa al trattamento dei dati sperimentali ho preferito rielaborarla prendendone solo alcuni elementi e adattandoli ai contenuti del corso. L'arbitrarietà (e in alcuni casi, purtroppo, anche la superficialità) di questa operazione non rende sempre utilizzabile il materiale per scopi professionali ma a volte ho preferito sacrificare il rigore formale all'efficacia didattica.***
Me ne scuso con i professionisti e gli operatori del settore. Gli studenti interessati possono contattarmi per conoscere la documentazione originale

INCERTEZZE DI TIPO A

Sono quelle ottenute a partire dalla deviazioni standard sperimentale della media aritmetica: che quantifica quanto bene $\overline{X}$ stimi il valore atteso **m** della grandezza fisica X:

$$\boxed{\sigma_s(\overline{X}) = \frac{\sigma_s(X)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1,N}(x_i - \overline{X})^2}{N(N-1)}}}$$

In base al teorema del limite centrale è anche possibile conoscere la <u>distribuzione di probabilità della media aritmetica: la curva di Gauss</u> con media pari al valore vero **m** e deviazione standard pari a $\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\mathbf{N}}}$. Pertanto se il valore vero di una misura è **m** e l'entità degli errori casuali è **σ**, ci si aspetta che la media aritmetica di N misure sia compresa nel 68% dei casi nell'intervallo intervallo di confidenza[24]: $\left[\mathbf{m} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\mathbf{N}}} ; \mathbf{m} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\mathbf{N}}}\right]$.

●●● <u>Inversione</u>: con un livello di confidenza del 68% si ha che: $\mathbf{m} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\mathbf{N}}} \leq \overline{\mathbf{X}} \leq \mathbf{m} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\mathbf{N}}}$

che corrisponde alle disuguaglianze: $\overline{\mathbf{X}} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\mathbf{N}}} \leq \mathbf{m} \leq \overline{\mathbf{X}} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\mathbf{N}}}$.

Dopo questa inversione si può stabilire che il valore vero **m** è all'interno dell'intervallo:

$$[\overline{X} - \sigma_s(\overline{X}); \overline{X} + \sigma_s(\overline{X})]$$

pertanto: **usualmente[25] il risultato di una serie di misure viene espresso da:**

$$\boxed{x = \overline{X} \pm \sigma_s(\overline{X})}$$

indicando in questo modo che con alta probabilità il valore vero cercato è compreso nell'intervallo:

$$[\overline{X} - \sigma_s(\overline{X}); \overline{X} + \sigma_s(\overline{X})]$$

È chiaro quindi perché, per ridurre l'effetto degli errori casuali, sia sufficiente aumentare N (cioè ripetere più volte la misura della stessa grandezza): in questo modo si riduce la larghezza dell'intervallo di confidenza $\sigma_s(\overline{X}) \propto 1/\sqrt{N}$.

Ovviamente σ_s(X) non dipende da N: ripetendo la misura si determina meglio la forma della distribuzione di probabilità della X ma non la si altera; è il meccanismo di compensazione insito nella somma degli scarti che riduce l'entità residua degli errori casuali nella media aritmetica riducendo $\sigma_s(\overline{X})$.

---

24 perché si è confidenti che con un livello di confidenza del 68% il valore cercato è all'interno dell'intervallo

25 per motivi di tempo talora si trasmette l'informazione relativa all'incertezza delle misure utilizzando un opportuno numero di cifre significate p.es. quello determinato dalla sensibilità della strumentazione utilizzata.

••• Il numero N di osservazioni deve essere sufficientemente elevato non tanto affinché $\overline{X}$ sia una stima affidabile di m (bastano 4-5 misure) ma soprattutto perché $\sigma_s(\overline{X})$ sia una stima affidabile della deviazione standard.
Infatti se la v.a. è gaussiana si può approssimativamente ritenere che

$$\frac{\sigma(\sigma)}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2(N-1)}}$$

(cioè se N = 5, 10, 20 l'incertezza relativa della stima di σ vale 35%, 24%, 16%).

Bisogna quindi tener conto della differenza fra $\sigma_s(\overline{X})$ e $\sigma(\overline{X})$ quando si calcolano livelli di confidenza: se la distribuzione di probabilità di X è normale (gaussiana) della differenza fra la deviazione standard e la sua stima tiene conto la distribuzione t-Student.
Tuttavia se X è distribuita gaussianamente (e spesso lo è) già con solo 5 misure c'è una probabilità di circa il 90% che x sia compreso nell'intervallo $[\overline{X} - 2\sigma_s(\overline{X}); \overline{X} + 2\sigma_s(\overline{X})]$.

INCERTEZZE DI TIPO B

non sono ottenute come deviazione standard sperimentali della media aritmetica.

Se data una grandezza X viene eseguita una sola misurazione ottenendo il valore x_1 l'incertezza da associare a x_1 come stima di X non può essere ricavata dall'unica misura a disposizione ma dalla conoscenza delle caratteristiche degli strumenti utilizzati o (in loro assenza) di risultati precedenti eseguiti nelle stesse condizioni e con gli stessi strumenti.

Se non c'è una conoscenza specifica della distribuzione di X all'interno di un certo intervallo, si può solo assumere che essa sia costante nell'intervallo e nulla all'esterno (distribuzione uniforme)[26]. In questo caso la deviazione standard è pari a $\frac{1}{\sqrt{12}}$ volte la larghezza dell'intervallo (p. es. 0,29 volte la divisione sulla scala dello strumento o l'intervallo definito da una tolleranza).

IL RISULTATO DI UNA MISURA PUÒ ESSERE ESPRESSO NEI SEGUENTI MODI:

- m = (100,021 47 ± 0,000 35) g
- m = 100,021 47 (35) g
- m = 100,021 47 (0,000 35) g
- m = 100,021 47 g con σ = 0,35 mg
- m = 100,02 g

All'interno di questo corso verrà preferita la prima modalità; la terza e la quarta sono scarsamente diffuse; l'ultima viene vietata (per motivi didattici) all'interno di questo corso ma è diffusissima nei settori in cui l'incertezza delle misura non riveste un ruolo critico.

---

[26] Notare che, nel caso non sia nota la distribuzione di X_i all'interno dell'intervallo che ne contiene "tutti" i valori, l'assunzione di una distribuzione uniforme implica che la deviazione standard è pari a $\frac{1}{\sqrt{12}}$ volte l'intervallo mentre una distribuzione normale, approssimando il livello del 99,73% al 100%, implica una deviazione standard pari a $\frac{1}{6}$ dell'intervallo. La differenza è trascurabile se si pensa a quanta informazione è necessaria per giustificare l'una anziché l'altra.

ESEMPIO

Vengono eseguite 20 misure indipendenti della temperatura t (in "gergo": viene estratto casualmente dalla popolazione madre un campione di 20 individui).

Tali valori sono riportati nella seguente tabella raggruppati in intervalli di 1°C per ottenere un istogramma (la preparazione di un istogramma non è necessario per l'analisi statistica dei dati ma, come detto, è utile per visualizzare l'andamento dei dati).

t_1 (°C)	t_2 (°C)	t (°C) con $t_1 \leq t < t_2$
94,5	95,5	-
95,5	96,5	-
96,5	97,5	96,90
97,5	98,5	98,18; 98,25
98,5	99,5	98,61; 99,03; 99,49
99,5	100,5	99,56; 99,74; 99,89; 100,07; 100,33; 100,42
100,5	101,5	100,68; 100,95; 101,11; 101,20
101,5	102,5	101,57; 101,84; 102,36
102,5	103,5	102,72
103,5	104,5	-
104,5	105,5	-

La media aritmetica delle 20 osservazioni è $\bar{t}$ = 100,145°C (miglior stima del valor medio di t); la deviazione standard sperimentale è pari a 1,489°C (incertezza associata ad una misura di t) e la deviazione standard sperimentale della media aritmetica è pari a 0,333°C (incertezza associata alla misura della media aritmetica); pertanto t = (100,1 ± 1,5)°C e $\bar{t}$ = (100,15 ± 0,33)°C

(**incertezza di tipo A**)

Se l'unica informazione a disposizione fosse stata che una misurazione aveva fornito il valore 100,5°C e che in generale la temperatura era compresa fra i due valori 96°C e 104°C, la stima della deviazione standard sarebbe stata 8°C / $\sqrt{12} \approx$ 2,3 °C; pertanto t = $\bar{t}$ = (100,5 ± 2,3)°C

(**incertezza di tipo B**).

Se invece fossero state ottenute le due misure 96°C e 104°C si sarebbe ottenuta la media aritmetica $\bar{t}$ = 100°C, la deviazione standard sperimentale 5,7°C e quella della media aritmetica[27] 4,0°C. Pertanto t = (100,0 ± 5,7)°C e $\bar{t}$ = (100,0 ± 4,0)°C

(**incertezza di tipo A**)

[27] è istruttivo dimostrare che date le misure x_1 e x_2 la deviazione standard sperimentale della loro media aritmetica vale $|x_1-x_2|/2$, cioè la metà della loro distanza (semi-dispersione massima) ... provate

CIFRE SIGNIFICATIVE

I metodi di misura, gli strumenti e l'osservatore possono essere classificati in base a:

sensibilità: capacità di apprezzare piccole variazioni delle grandezze in esame

precisione: capacità di produrre lo stesso risultato ripetendo più volte la stessa osservazione (errori casuali trascurabili)

accuratezza: capacità di produrre un risultato esente da errori sistematici

Quanto più una misura è spinta (è necessario determinare i particolari) (**sensibilità**)
tanto meglio (piccoli errori casuali) si dovrà osservare il fenomeno (**precisione**)
e tanto più si dovrà porre attenzione agli errori sistematici (**accuratezza**)
Di conseguenza il valore numerico della misura andrà riportato con un maggior numero di cifre (**cifre significative**)

Più sono le cifre significative, migliore deve essere la qualità della misura che implica quindi un maggior *costo*: acquisto(€), manutenzione, strumentazione, personale, tempo, facilità d'uso, ...

IL NUMERO DI CIFRE SIGNIFICATIVE DEL RISULTATO DI UNA MISURA È QUINDI STRETTAMENTE CORRELATO ALLA BONTÀ DELLA MISURA E NON PUÒ ESSERE SCELTO ARBITRARIAMENTE.

Per ottenere il numero di cifre significative occorre togliere l'eventuale virgola al numero e contare tutte le cifre a partire dalla prima a sinistra non nulla:

numero	cifre	cifre decimali	cifre significative
12 300	5	0	5
1 230,0 x 10	5	1	5
123,0 x 10^2	4	1	4
1,23 x 10^4	3	2	3
0,123 0 x 10^5	5	4	4

Usualmente **L'INCERTEZZA VIENE RIPORTATA CON DUE CIFRE SIGNIFICATIVE**.

I valori dei risultati devono essere arrotondati opportunamente per essere consistenti con le incertezze: ad esempio se $R = 10{,}057\ 62\ \Omega$ con $\sigma = 27\ \text{m}\,\Omega$
allora sarà $R = (10{,}058 \pm 0{,}027)\ \Omega$.

Se un numero ha più cifre significative di quante ne occorrano, il numero va arrotondato (approssimando all'unità superiore se l'ultima cifra è 5 o superiore)

0,445 945   0,445 95   0,445 9   0,446   0,45   0,4
0,445 95
0,446 0
0,446   <--- arrotondamenti successivi: differiscono al più
0,45   per la meno significativa delle cifre dai valori
0,5   ottenuti direttamente

Per alcune applicazioni (<u>è vivamente sconsigliato all'interno di questo corso</u>) è sufficiente rappresentare l'incertezza mediante il numero di cifre significative del risultato; in tal caso il risultato deve essere riportato con un numero di cifre significative tale per cui l'incertezza corrisponda all'ultima di esse:

$m = (100{,}021\ 47 \pm 0{,}000\ 35)$ g -> $m = 100{,}021\ 5$ g
$R = (10{,}058 \pm 0{,}027)\ \Omega$ -> $R = 10{,}06\ \Omega$

ESEMPIO

Calcolare la media, la deviazione standard e la deviazione standard della media delle misure:

I(mA) 124 136 142 117 140 138 125

I=131,714 29 mA $\sigma_s(I) = 9{,}604\ 0$ mA $\sigma_s(\bar{I}) = 3{,}629\ 97$ mA

A) Riportare la <u>deviazione standard</u> della media aritmetica con due cifre <u>significative</u>

$$\sigma_s(\bar{I}) = 3{,}6 \text{ mA}$$

B) Arrotondare la <u>media</u> in modo da avere lo stesso numero di cifre <u>decimali</u> della deviazione standard $\bar{I} = 131{,}7$ mA

Per riportare correttamente il risultato di una serie di misure utilizzare le regole A) e B) dell'esempio ed utilizzare la notazione:

$$\mathbf{I = (131{,}7 \pm 3{,}6)\ mA}$$

Eseguendo delle operazione fra risultati di misure, la considerazione da ricordare è che aggiungere ad una cifra incerta un'altra cifra non aumenta la quantità di informazione. Pertanto:

1) **il valore di una <u>misura diretta</u> deve avere tante cifre significative quante sono quelle ottenute all'aver eseguito la lettura di uno strumento analogico al decimo di divisione o al digit nel caso di uno strumento digitale**;

2) nelle quantità ottenute dalle operazioni di somma o differenza di misure il risultato deve avere tante cifre decimali quante ne ha la misura col minor numero:

5,94 +
789,1 +
15,426 =
810,466 =>
=> 810,5

3) nelle quantità ottenute come prodotto o rapporto di misure il risultato deve avere tante cifre significative quante ne ha la misura col minor numero:

2,43 x
6,9 =
16,767 che va arrotondato a 17 in modo tale che il risultato abbia due cifre significative come 6,9.

INCERTEZZE ASSOLUTE E RELATIVE

La quantificazione assoluta dell'incertezza non consente di valutare la bontà di una misura. Per esempio l'incertezza 0,12 cm è indice di una ottima misura se il valore misurato è di 730,23 cm ma rappresenta una misura di scarsa qualità se il valore misurato è - 0,35 cm.

Per questo motivo spesso si rapporta l'incertezza al valore della misura: $\dfrac{\sigma(X)}{|X|}$

(incertezza relativa di X)

per cui le due misure precedenti presentano incertezze relative rispettivamente di

$$\frac{0{,}12}{730{,}23} = 0{,}0001643 = 0{,}01643\ \% \approx 0{,}016\ \% \quad \text{e} \quad \frac{0{,}12}{0{,}35} = 0{,}3429 = 34{,}29\ \% \approx 34\ \%$$

dove nell'ultimo passaggio si utilizza la convenzione di utilizzare due cifre significative per esprimere le incertezze. Il confronto sulla qualità delle due misure è immediato.

Nella formula dell'incertezza relativa σ(X) rappresenta la deviazione standard sperimentale di tipo A o B (cioè la migliore stima dell'incertezza della misura) e X la media aritmetica delle misure o il valore dell'unica misura effettuata (cioè la migliore stima del valore vero).

La strumentazione di uso comune produce incertezze relative[28] dell'ordine del %. Valori superiori al 10% non sono sempre accettabili[29]. Ottenere incertezze inferiori allo 0,1 % senza aver utilizzato strumentazione di qualità o metodi particolari è spesso sinonimo di sbagli di calcolo.

Va prestata attenzione al denominatore della formula dell'incertezza relativa: le incertezze relative perdono significato se le misure sono pressoché nulle. In questo caso eventuali confronti possono basarsi solo sulle incertezze assolute.

MISURE INDIRETTE

spesso un misurando Y non è misurato direttamente ma è determinato a partire da altre M grandezze (misurate direttamente) $X_1, X_2, \ldots X_i, \ldots, X_M$ attraverso una relazione

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots X_i, \ldots, X_M) \qquad (1)$$

che può essere una definizione o una legge geometrica, fisica o di qualunque altro tipo che lega fra loro diverse grandezze fisiche.

Una stima (misura derivata) y della grandezza Y è data da:

---

[28] dato che l'incertezza relativa è una quantità adimensionale consente il confronto fra le prestazioni di strumenti che misurano grandezze fisiche diverse: un metro con divisioni al mm è migliore di una bilancia con portata 1 kg e sensibilità 10 g/div

[29] in applicazioni particolari sono tollerate anche incertezze del 100% perché sinonimo di quantità diverse da zero e indicatori dell'ordine di grandezza del valore della grandezza in esame: cosa preferireste se vi dicessero che vincerete ad una lotteria (250±250)€ oppure (10000±10000)€ ?

$$\boxed{Y \approx y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots \overline{X}_i, \ldots, \overline{X}_M)} \qquad (1)$$

dove col simbolo $\overline{X}_i$ si intende la media aritmetica delle N_i misure x_{ik} $(k=1,N_i)$: $\overline{X}_i = \dfrac{\sum_{k=1,N_j} x_{ik}}{N_i}$

o l'unica determinazione x_i nel caso di una sola misura.

Questa stima y di Y risulta corretta solo se la funzione (1) è lineare[30]; altrimenti costituisce un'approssimazione valida al primo ordine di uno sviluppo della funzione in serie di Taylor (sviluppo nell'intorno del punto determinato dai risultati delle misure: $[\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots \overline{X}_i, \ldots, \overline{X}_M]$).

PROPAGAZIONE DELLE INCERTEZZE ASSOLUTE

La deviazione standard sperimentale del risultato di una misurazione ottenuto dai valori di altre grandezze fra loro indipendenti è detta **incertezza standard combinata**:

$$\boxed{\sigma(y) \approx \sigma_s(y) = \sqrt{\sum_{i=1,M} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2_{X_i=\overline{X}_i} \sigma_s^2(\overline{X}_i)}} \qquad (2)$$

Essa è basata sullo sviluppo della funzione (1) in serie di Taylor al primo ordine effettuato nell'intorno del punto determinato dai valori veri delle grandezze misurate direttamente (valori veri approssimati dalle rispettive medie aritmetiche delle misure: $[\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots \overline{X}_i, \ldots, \overline{X}_M]$).

Anche le derivate parziali $\partial f/\partial X_i$ andrebbero calcolate, in linea di principio, nei valori attesi delle X_i. Queste derivate sono dette **coefficienti di sensibilità** perché descrivono di quanto varia la grandezza Y al variare delle X_i. La varianza combinata $\sigma^2(y)$ viene quindi vista come somma di M termini ognuno dei quali rappresenta la stima della varianza di Y dovuta alla variazione del particolare X_i.

Quando la funzione (1) non è nota i coefficienti di sensibilità sono ricavabili sperimentalmente misurando la variazione di Y al variare di una particolare X_i mentre le altre grandezze $X_{j\neq i}$ restano costanti.

Anche in questo caso con i simboli $\overline{X}_i$ e $\sigma(\overline{X}_i)$ si intendono le migliori determinazioni del valore vero della grandezza Xi e la stima dell'incertezza della sua misura.

Pertanto:

tipo A) media aritmetica e deviazione standard sperimentale della media aritmetica

tipo B) unica determinazione e incertezza di tipo B

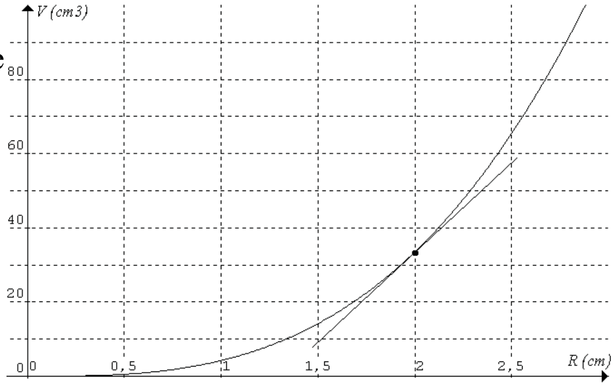
Qualora la non linearità della f nell'intorno dei valori medi $\overline{X}_i$ sia significativa, all'equazione (2) vanno sommati termini di ordine più elevato.

Se invece le grandezze non sono indipendenti ma correlate l'espressione più appropriata per la varianza combinata richiede l'uso delle covarianze. Va notato che se viene utilizzato uno stesso strumento o dato di riferimento o calibrazione con una incertezza significativa, possono introdursi correlazioni non trascurabili fra grandezze altrimenti indipendenti.

Nelle esperienze svolte durante il corso la non linearità e la correlazione saranno in generale trascurabili e la (2) verrà ritenuta sufficientemente accurata per i nostri scopi.

---

[30] la stima sarebbe distorta perché $E(f(X_1,X_2,\ldots,X_M) = f[E(X_1),E(X_2), \ldots,E(X_M)]$ solo se la funzione f è lineare



Questa stima è quindi esatta solo se la funzione (1) è lineare; altrimenti costituisce una approssimazione al primo ordine dello sviluppo in serie di Taylor

ESEMPIO[31]: $V = 4/3\ \pi\ R^3$

$$\sigma_s(V) = 4\pi R^2 \sigma_s(R)$$

Nel grafico si vede quanto sia linearizzabile la funzione $V = 4/3\ \pi\ R^3$ nell'intorno della misura R = 2 cm: è sufficiente che $\sigma_s(R)$ non faccia variare i risultati di una misura di R fuori dell'intervallo [1,8 cm; 2,2 cm] in cui la retta tangente approssima "bene" la funzione.

SBAGLIO FREQUENTE

$Y = a X + b X^2$ $\qquad \cancel{\sigma(Y) = \sqrt{a^2\sigma^2(X) + 4b^2x^2\sigma^2(X)} = \sqrt{a^2 + 4b^2x^2}\ \sigma(X)}$

anziché $\sigma(Y) = |(a + 2\ b\ x)|\ \sigma(X)$

la formula di propagazione è ottenuta considerando variabili indipendenti; X e X^2 non lo sono !

PROPAGAZIONE DELLE INCERTEZZE RELATIVE:

se la funzione (1) è un monomio: $\boxed{Y = c\ X_1^{p_1} X_2^{p_2} \ldots X_M^{p_M}}$ l'incertezza standard combinata può essere calcolata tenuta più rapidamente mediante le incertezza relative.

Considerando che i coefficienti di sensibilità valgono $\partial f / \partial X_i = Y\ p_i\ X_i$ sostituendo l'espressione del monomio nella (2) si ottiene, col solito significato dei simboli:

$$\boxed{\frac{\sigma_s(y)}{y} = \sqrt{\sum_{i=1,M} p_i^2 \left(\frac{\sigma_s(\overline{X}_i)}{\overline{X}_i} \right)^2}} \qquad (3)$$

VALIDA SOLO PER MONOMI [32]

È consigliato l'uso, quando possibile, della (3) al posto della (2) per due motivi:
- il calcolo delle derivate, appena la funzione diventa un poco complessa, diventa pesante
- non è facile distinguere i contributi dati dalle misure dirette e quindi verificare la bontà del calcolo.

SBAGLIO FREQUENTE

$Y = a X + b X_0$ $\qquad \cancel{\sigma(Y)/|y| = |a|\ \sigma(X)/|x|}$

anziché $\sigma(Y)/|y| = |a|\ \sigma(X)/\ |a\ x + b\ X_0|$

Y non è sotto forma di monomio: l'incertezza relativa è data dal rapporto $\sigma(Y) = |a|\ \sigma(X)$ diviso per $|y| = |a\ x + b\ X_0|$!

---

[31] **se la (1) è funzione della sola X allora la (2) diventa banalmente $\sigma_s(Y) = |dY/dX|_x\ \sigma_s(X)$**

[32] **se la (1) è funzione della sola X allora la (3) diventa banalmente $\sigma_s(Y)/|y| = |p|\ \sigma_s(X)/|x|$**

Il seguente esempio mostra come la (3) possa essere utilizzata per scegliere, in fase di progetto di una misura, la strumentazione più idonea:

> Una barra di metallo ($\rho \approx 8$ g/cm^3) ha le dimensioni nominali 5 mm x 5 cm x 5 dm.
> Si vuole misurare ρ avendo a disposizione una bilancia con 1/s = 10 g/div, un Palmer, un calibro e un metro a nastro (con divisioni di 1 mm).
> Ottimizzare l'uso degli strumenti (riferirsi a quelli utilizzati nel corso) e stimare la minima incertezza ottenibile nella misura di ρ.

Considerando rispettivamente a, b e c i tre lati della barra si ha:
$V = a\,b\,c \approx 0{,}5 \times 5 \times 50 = 125$ cm^3; $m = V\rho \approx 125 \times 8 = 1000$ g

Quindi la misura di massa avrà un'incertezza relativa $\frac{\sigma(m)}{m} = 0{,}29\ \%$ dove $\sigma(m) = 10\text{g}/\sqrt{12} = 2{,}9$ g

L'incertezza relativa complessiva sarà invece data dalla (3):

$$\frac{\sigma(\rho)}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\sigma(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(b)}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(c)}{c}\right)^2}$$

la scelta ottimale degli strumenti è quella per cui i vari termini sono dello stesso ordine di grandezza:

		Palmer (σ = 0,0029 mm)	calibro (σ = 0,014 mm)	metro (σ = 0,29 mm)
a	5 mm	0,058 %	0,28 %	5,8 %
b	5 cm	fuori portata	0,028 %	0,58 %
c	5 dm	fuori portata	fuori portata	0,058 %

utilizzando rispettivamente il Palmer, il calibro e il metro $\frac{\sigma(\rho)}{\rho} = 0{,}30\%$ mentre utilizzando il calibro (meno "costoso") anche per il lato a $\frac{\sigma(\rho)}{\rho} = 0{,}41\%$ (sostanzialmente equivalente).

●●● Nel riportare il risultato di una misura e la sua incertezza occorre:

- dare la descrizione completa di come è definita la grandezza Y;

- fornire il valore della stima della grandezza e la deviazione standard (combinata se la misura è indiretta) con le opportune unità di misura e, qualora sia appropriato, anche l'incertezza relativa;

- descrivere il metodo utilizzato per ricavare dai dati il valore del risultato e la sua incertezza;

- nel caso di misure derivate riportare il valore e l'incertezza (anche relativa) di ogni grandezza che contribuisce alla grandezza Y e la descrizione di come sono stati ottenuti;

- presentare l'analisi dei dati in modo tale che sia possibile comprendere rapidamente i passi più importanti e si possa ripetere il calcolo del risultato se necessario;

- fornire tutti i termini correttivi e le costanti utilizzate.

ESEMPI

- 1) Date le misure $L1 = (20{,}42 \pm 0{,}26)$ cm
  $L2 = (10{,}11 \pm 0{,}43)$ cm

1) <u>misurare la lunghezza **Ls = L1 + L2**</u>

$Ls = 30{,}53 \text{ cm} \pm \sigma_s(Ls)$

$$\sigma_s(Ls) = \sqrt{\left(\frac{\partial Ls}{\partial L1}\right)^2 \sigma_s^2(L1) + \left(\frac{\partial Ls}{\partial L2}\right)^2 \sigma_s^2(L2)} = \sqrt{(+1)^2\sigma_s^2(L1) + (+1)^2\sigma_s^2(L2)} = \sqrt{0{,}26^2 + 0{,}43^2} = 0{,}5025 \text{ cm}$$

$Ls = (30{,}53 \pm 0{,}50)$ cm (1,6%)

2) <u>misurare la lunghezza **Ld = L1 - L2**</u>

$Ld = 10{,}31 \text{ cm} \pm \sigma_s(Ld)$

$$\sigma_s(Ld) = \sqrt{\left(\frac{\partial Ld}{\partial L1}\right)^2 \sigma_s^2(L1) + \left(\frac{\partial Ld}{\partial L2}\right)^2 \sigma_s^2(L2)} = \sqrt{(+1)^2\sigma_s^2(L1) + (-1)^2\sigma_s^2(L2)} = \sqrt{0{,}26^2 + 0{,}43^2} = 0{,}5025 \text{ cm}$$

$Ld = (10{,}51 \pm 0{,}50)$ cm (4,8%)

3) <u>misurare l'area **A = L1 x L2**</u>

$A = 206{,}4462 \text{ cm}^2 \pm \sigma_s(A)$

$$\sigma_s(A) = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial L1}\right)^2 \sigma_s^2(L1) + \left(\frac{\partial A}{\partial L2}\right)^2 \sigma_s^2(L2)} = \sqrt{(L2)^2\sigma_s^2(L1) + (L1)^2\sigma_s^2(L2)} = \sqrt{10{,}11^2 0{,}26^2 + 20{,}42^2 0{,}43^2} = 9{,}166 \text{ cm}^2$$

$A = (206{,}4 \pm 9{,}2) \text{ cm}^2$ (4,6%)

- 2) Misurare la grandezza derivata "densità di una sfera": $\rho = \dfrac{m}{\frac{4\pi}{3} r^3}$ (a)

Supponiamo di aver misurato la massa m ($m = \overline{m} \pm \sigma_s(\overline{m})$) e il raggio r ($r = \overline{r} \pm \sigma_s(\overline{r})$).
Propagando le incertezze assolute si ha:

$$\sigma(\rho) = \sqrt{\left(\frac{1}{\frac{4\pi}{3}\overline{r}^3}\right)^2 \sigma_s^2(\overline{m}) + \left(-3\frac{\overline{m}}{\frac{4\pi}{3}\overline{r}^4}\right)^2 \sigma_s^2(\overline{r})} \qquad \text{(b)}$$

In questo caso però è possibile, e quindi preferibile, utilizzare la formula di propagazione per le incertezze relative che è di uso più immediato (non richiede calcoli di derivate):

$$\frac{\sigma(\rho)}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_s(\overline{m})}{\overline{m}}\right)^2 + (-3)^2\left(\frac{\sigma_s(\overline{r})}{\overline{r}}\right)^2} \qquad \text{(c)}$$

da cui si ottiene:

$$\sigma(\rho) = \rho\sqrt{\left(\frac{\sigma_s(\overline{m})}{\overline{m}}\right)^2 + 9\left(\frac{\sigma_s(\overline{r})}{\overline{r}}\right)^2} \qquad \text{(d)}$$

Va notato che matematicamente le due formule (b) e (d) sono coincidenti: entrambe derivano dalla linearizzazione della (a) mediante sviluppo in serie di Taylor nell'intorno del punto $(\overline{m}, \overline{r})$ [33]

---

[33] anche se ρ varia col cubo di r, nell'intorno di $\overline{r}$ la funzione è linearizzabile: è sufficiente considerare valori di r che si discostino di poco da $\overline{r}$: $\frac{r-\overline{r}}{\overline{r}} << 1$. Nel nostro caso questo implica $\frac{\sigma(\overline{r})}{\overline{r}} << 1$, relazione generalmente verificata in tutte le misure.

• 3) Misurare la densità di un cilindro di massa M, altezza h e diametro d a partire dai dati:

M = 13,2 12,4 14,0 12,8 14,6 13,5 g
h = 10,02 cm (una sola misura con strumento analogico)
d: in misure precedenti si era ottenuto 8,500 mm mediante calibro (50µm/div)

M: dai dati si ricava $\sum_{i=1,6} m_i = 80{,}5\,g$ e quindi $\overline{M} = \dfrac{\sum_{i=1,6} m_i}{6} = 13{,}427\,g$; inoltre

$\sum_{i=1,6} m_i^2 = 1083{,}25\,g^2$ e quindi $\sigma_M = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1,6} m_i^2 - 6\cdot\overline{M}^2}{5}} = 0{,}801\,g$ da cui $\sigma_{\overline{M}} = \dfrac{\sigma_M}{\sqrt{6}} = 0{,}326\,g$

Pertanto $M = (13{,}43 \pm 0{,}33)\times 10^{-3}\,kg$

h: l'unica misura è riportata al decimo di mm; quindi la divisione dello strumento è il mm;
σ_B= 1mm/√12 = 0,29 mm Pertanto $h = (100{,}20 \pm 0{,}29)\times 10^{-3}\,m$

d: σ_B= 50µm/√12 = 14,43 µm Pertanto $d = (8{,}500 \pm 0{,}014)\times 10^{-3}\,m$

e quindi $\rho = \dfrac{\overline{M}}{\frac{\pi}{4}\overline{d}^2\overline{h}} \pm \sqrt{\left(+\dfrac{1}{\frac{\pi}{4}\overline{d}^2\overline{h}}\right)^2 \sigma_{\overline{M}}^2 + \left(-2\dfrac{M}{\frac{\pi}{4}\overline{d}^3\overline{h}}\right)^2 \sigma_{\overline{d}}^2 + \left(-\dfrac{M}{\frac{\pi}{4}\overline{d}^2\overline{h}^2}\right)^2 \sigma_{\overline{h}}^2}$

$$\rho = 2\,362 \pm \sqrt{(175\,875)^2 (0{,}33\times10^{-3})^2 + (-555\,766)^2 (0{,}014\times10^{-3})^2 + (-23\,573)^2 (0{,}29\times10^{-3})^2} =$$
$$= 2\,362 \pm \sqrt{(58{,}039)^2 + (7{,}781)^2 + (6{,}836)^2} = (2\,362 \pm 59)\ kg/m^3$$

Alternativamente, poiché la relazione $\rho = \dfrac{M}{\frac{\pi}{4}d^2 h}$ è un monomio, usando le incertezze relative:

$$M = (13{,}43 \pm 0{,}33)\times10^{-3}\,kg \rightarrow \frac{\sigma_M}{M} = \frac{0{,}33\times10^{-3}\,kg}{13{,}43\times10^{-3}\,kg} = 0{,}02457 = 2{,}5\%$$

$$d = (8{,}500 \pm 0{,}014)\times10^{-3}\,m \rightarrow \frac{\sigma_d}{d} = \frac{0{,}014\times10^{-3}\,m}{8{,}5\times10^{-3}\,m} = 0{,}0016471 = 0{,}16\%$$

$$h = (100{,}20 \pm 0{,}29)\times10^{-3}\,m \rightarrow \frac{\sigma_h}{h} = \frac{0{,}29\times10^{-3}\,m}{100{,}2\times10^{-3}\,m} = 0{,}0028942 = 0{,}29\%$$

quindi $\rho = \dfrac{\overline{M}}{\frac{\pi}{4}\overline{d}^2\overline{h}} = 2362\ kg/m^3$ e $\sigma_\rho = \left(\dfrac{\sigma_\rho}{\rho}\right)\rho = \sqrt{(+1)^2\left(\dfrac{\sigma_M}{M}\right)^2 + (-2)^2\left(\dfrac{\sigma_d}{d}\right)^2 + (-1)^2\left(\dfrac{\sigma_h}{h}\right)^2}\ \rho$

pertanto:

$$\rho = 2\,362\left(1 \pm \sqrt{(0{,}025)^2 + 4(0{,}0029)^2 + (0{,}0016)^2}\right) = 2\,362(1 \pm 0{,}02571) = (2362 \pm 61)\ kg/m^3$$

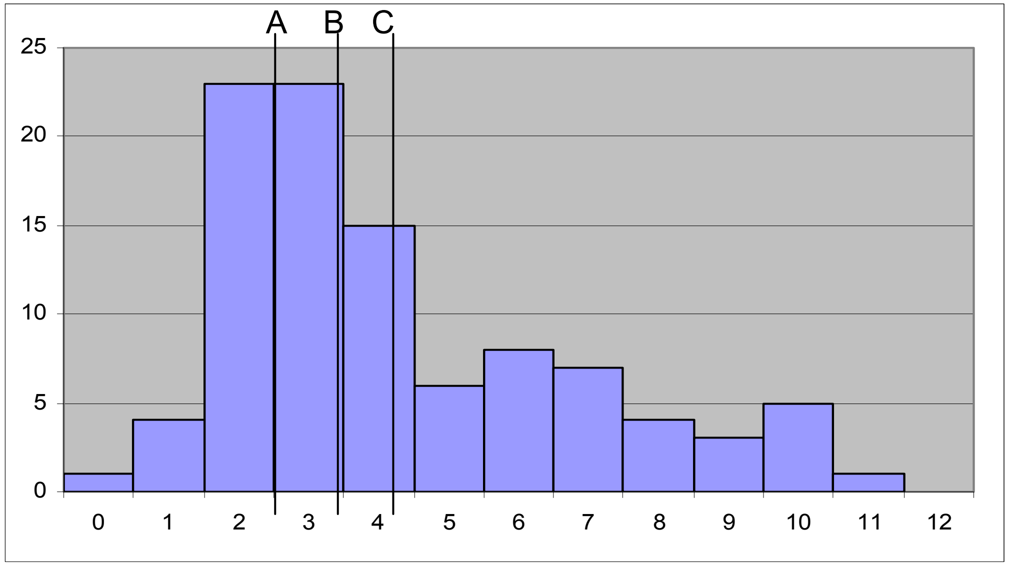
La piccola differenza nei due casi sulla seconda cifra delle incertezze è dovuta al fatto che le incertezze vengono riportate con due cifre significative e quindi la meno significative risente dell'approssimazione

3,6	5,9	3,1	2,3	3,0	4,9	3,2	3,6	1,5	4,1
1,6	3,5	2,8	4,2	4,0	3,7	1,8	2,6	6,2	1,9
3,1	3,1	3,7	1,6	2,8	3,1	6,5	2,6	2,7	6,6
3,4	2,7	6,7	3,7	9,9	1,7	2,0	$\boxed{10,9}$	2,0	4,2
4,5	3,2	9,5	7,6	9,4	4,9	5,2	6,0	8,1	10,2
2,3	3,7	3,7	6,6	5,5	2,5	4,5	1,6	5,9	6,3
2,3	2,7	5,3	2,1	3,1	$\boxed{0,5}$	0,6	2,6	1,7	1,8
7,8	1,2	6,2	1,8	2,2	2,3	7,5	1,7	9,3	2,1
1,0	3,5	6,6	3,6	6,8	2,9	6,2	2,9	3,0	1,6
5,3	8,1	3,2	7,1	10,3	1,7	10,0	10,5	4,2	2,5

min	0,5
MAX	10,9
differenza	10,4
differenza/10	1,04
larghezza classi	1

A	B	C	D	E	F	G		
-0,5	0,5	0	1	0	-4,26	18,15		
0,5	1,5	1	4	4	-13,04	42,51		
1,5	2,5	2	23	46	-51,98	117,47		
2,5	3,5	3	23	69	-28,98	36,51		
3,5	4,5	4	15	60	-3,90	1,01		
4,5	5,5	5	6	30	4,44	3,29		
5,5	6,5	6	8	48	13,92	24,22		
6,5	7,5	7	7	49	19,18	52,55		
7,5	8,5	8	4	32	14,96	55,95		
8,5	9,5	9	3	27	14,22	67,40		
9,5	10,5	10	5	50	28,70	164,74		
10,5	11,5	11	1	11	6,74	45,43		
11,5	12,5	12	0	0	0,00	0,00		
				426	0,00	629,24		
		N	100		4,260	2,508	0,251	A
					4,275	2,571	0,257	B

TABELLE e ISTOGRAMMI

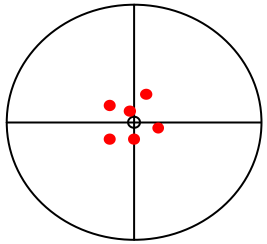


se l'andamento dei dati è regolare (i valori sono tutti compresi fra 0 e 10 circa potendo andare da $-\infty$ a $+\infty$) c'è un motivo fondamentale alla sua base

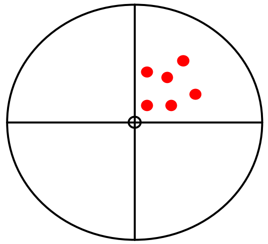
Quale può essere un valore rappresentativo di tutte le misure?

Come si può quantificare la larghezza della distribuzione?

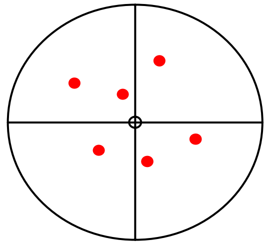
raffiche di 6 colpi



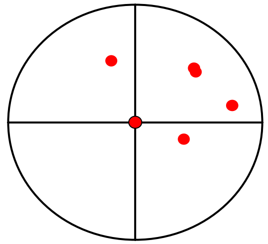
preciso
accurato



preciso
inaccurato



impreciso
accurato



impreciso
inaccurato

I metodi di misura, gli strumenti e l'osservatore possono essere classificati in base a:
sensibilità: capacità di apprezzare piccole variazioni delle grandezze in esame
precisione: capacità di produrre lo stesso risultato ripetendo più volte la stessa osservazione (errori casuali trascurabili)
accuratezza: capacità di produrre un risultato esente da errori sistematici

Si definisce errore la differenza fra il risultato di una misura e il valore vero del misurando.

Ogni misura è affetta da errori casuali (imprecisione) e sistematici (inaccuratezza) dovuti al metodo di misura, alla strumentazione, all'operatore.

Piccole variazioni del valore vero possono essere apprezzate solo se si è abbastanza sensibili (e precisi).

Gli errori sistematici si evidenziano cambiando le condizioni di misura (metodo, strumento, operatore). Possono essere corretti o eliminati.

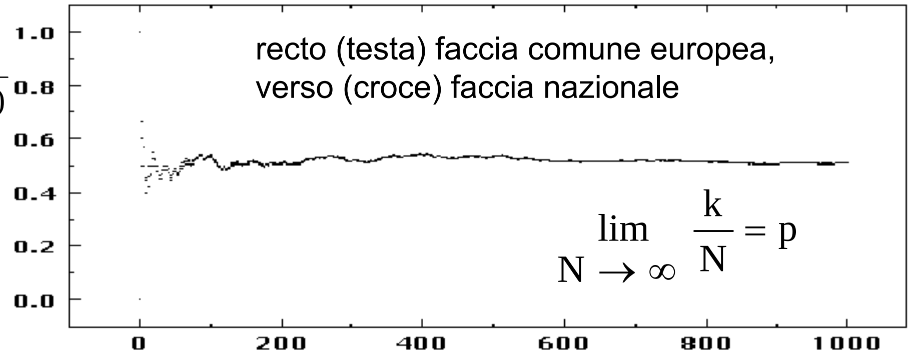
Gli errori casuali sono dovuti a variazioni non prevedibili di grandezze influenti; sono descrivibili in termini probabilistici. Non sono eliminabili ma gli effetti possono essere ridotti statisticamente aumentando il numero di misure.

Dall'analisi dei risultati sperimentali (statistica) si ottengono previsioni (probabilità).

Probabilità: grado di fiducia nel verificarsi di un evento.

$0 \le p \le 1 \qquad p = \dfrac{\#\text{ casi favorevoli}}{\#\text{ casi possibili}} \qquad p = \lim_{N \to \infty} \dfrac{k\text{ (successi)}}{N\text{ (tentativi)}}$

$$\frac{k}{N} = \frac{n(T)}{n(T)+n(C)}$$

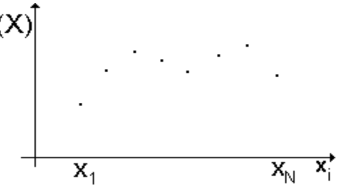


$N = n(T) + n(C)$

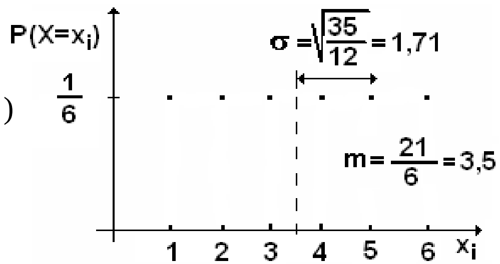
Si definisce <u>variabile aleatoria</u> la variabile X = {x_1, x_2, ..., x_N} che assume i valori per la quale è definita non in base a leggi deterministiche ma al caso.

La funzione P(X) definita per i valori X {x_1, x_2, ..., x_N} è detta <u>distribuzione di probabilità</u> della variabile aleatoria discreta X

$$\sum_{i=1,N} P(x_i) = 1$$



$$E(X) = \sum_{i=1,N} x_i \; P(x_i)$$

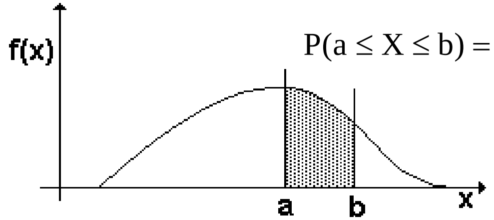


$$\sigma^2(X) = \sum_{i=1,N} (X_i - E(X))^2 P(x_i)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2(X)}$$

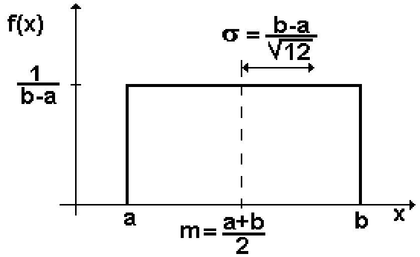
Se X è una v.a associata ad una grandezza continua si può definire la probabilità infinitesima che X assuma un valore compreso fra x e x+dx: P(x ≤ X < x+dx) = dP(x) = f(x) dx
Dove f(x)=dP(x)/dx è la <u>densità di probabilità o funzione di distribuzione</u>
La probabilità che X assuma un valore compreso fra **a** e **b** è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

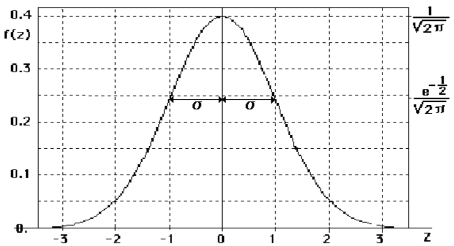


$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x)\, dx$$

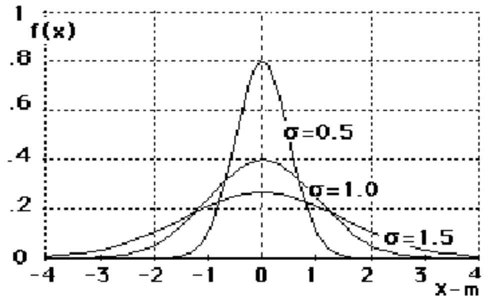


$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)\, dx$$



$$z = \frac{x-m}{\sigma}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



Elaborazione statistica dei dati sperimentali

- Lo scopo di ogni misurazione è la determinazione del valore vero di un misurando.
- Le imperfezioni degli strumenti, le variazioni delle condizioni ambientali e l'influenza dell'osservatore (nonché i suoi sbagli) provocano errori di misura. Essi sono il motivo per cui non è possibile trovare il valore vero ***M***.
- Si assume che i valori $\mathbf{x_i}$ ottenuti da diverse misurazioni individuali di una serie di misurazioni altro non sono che le determinazioni di una variabile casuale **X**.
- Questa variabile aleatoria **X** obbedisce ad una distribuzione di probabilità caratterizzabile in particolare con due riassunti che sono il valore atteso **m** e la deviazione standard σ.
- In assenza di errori sistematici il valore atteso **m** coincide col valore vero ***M*** del misurando. La deviazione standard σ è una misura della variabilità, per via dell'errore casuale, di un singolo valore misurato dal valore atteso del misurando.
- I parametri **m** e σ della distribuzione di probabilità non sono generalmente noti. Il problema consiste nel determinare delle loro stime a partire da una serie di misurazioni.
- Usualmente per la stima di **m** si utilizza la media aritmetica $\overline{X}$ e per quella di σ si utilizza la deviazione standard sperimentale σ_s. Poiché i valori misurati sono realizzazioni di una variabile aleatoria, $\overline{X}$ fluttuerà statisticamente intorno a **m** e σ_s intorno a σ.
- Sulla base delle assunzioni riguardanti il tipo di distribuzione (spesso si assumerà quella gaussiana) con l'aiuto dei riassunti statistici $\overline{X}$ e σ_s è possibile determinare un intervallo di confidenza all'interno del quale è contenuto, con un livello di confidenza fissato, il valore **m**.
- Gli effetti noti degli errori sistematici vengono eliminati applicando correzioni. Per gli altri, sconosciuti, un approccio per la loro riduzione consiste nell'allargamento dell'intervallo di confidenza in base alle assunzioni applicabili al tipo di misurazione effettuata.

Dalle norme DIN 1319 parte 3

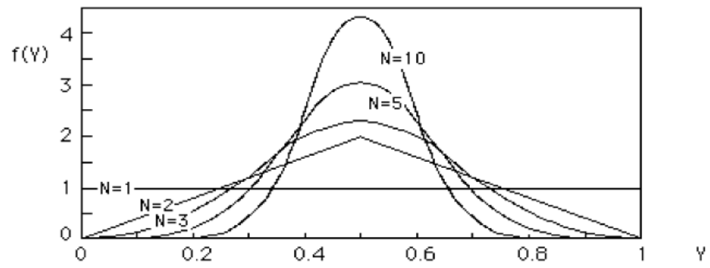
$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1,N} x_i}{N}$$

$$\sigma_s(X) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1,N}(x_i - \overline{X})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1,N} x_i^2 - N\,\overline{X}^2}{N-1}}$$

$$\sigma_s(\overline{X}) = \frac{\sigma_s(X)}{\sqrt{N}}$$

$$\boxed{\overline{X} \pm \sigma_s(\overline{X})}$$

LIVELLI DI CONFIDENZA (Gauss)
P(m - 1 σ ≤ X ≤ m + 1 σ) = 68,3%
P(m - 2 σ ≤ X ≤ m + 2 σ) = 95,4%
P(m - 3 σ ≤ X ≤ m + 3 σ) = 99,7%



teorema del limite centrale

formulario per l'elaborazione di dati sperimentali

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1,N} x_i}{N} \qquad \sigma_s(X) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1,N} (x_i - \overline{X})^2}{N-1}} \qquad \sigma_s(\overline{X}) = \frac{\sigma_s(X)}{\sqrt{N}}$$

$$X_p = \frac{\sum_{i=1,N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1,N} \frac{1}{\sigma_i^2}} \pm \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1,N} \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

Medie

$$\Delta = X - m \qquad s = \frac{X-m}{m} \qquad t = \frac{X-m}{\sigma}$$

$$\Delta = X_1 - X_2 \qquad s = \frac{X_1 - X_2}{\frac{X_1+X_2}{2}} \qquad t = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

confronti

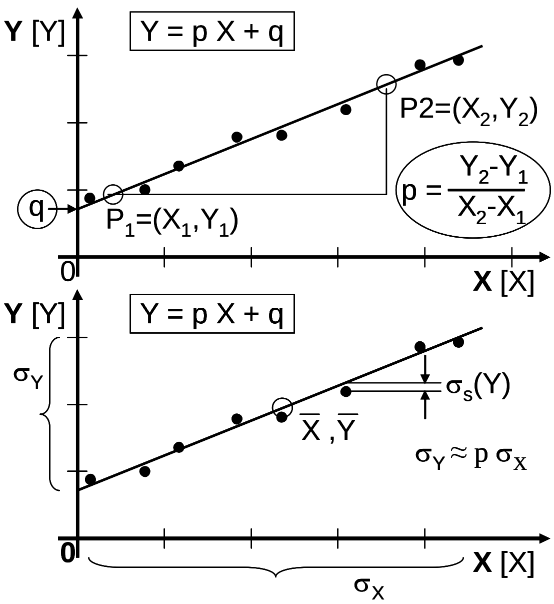
$$p = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i}$$

$$q = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{X})^2}{N}} \qquad \sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \overline{Y})^2}{N}}$$

$$\sigma_s(Y) = \sqrt{\frac{\sum [y_i - (p\,x_i + q)]^2}{N-2}}$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma_s(Y)}{\sqrt{N}\sigma_X} \qquad \sigma_q = \frac{\sigma_s(Y)}{\sqrt{N}} \sqrt{1 + \frac{\overline{X}^2}{\sigma_X^2}}$$



minimi quadrati

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N) \qquad \sigma(Y) = \sqrt{\sum_{i=1,N} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\sigma(X_i)\right)^2}$$

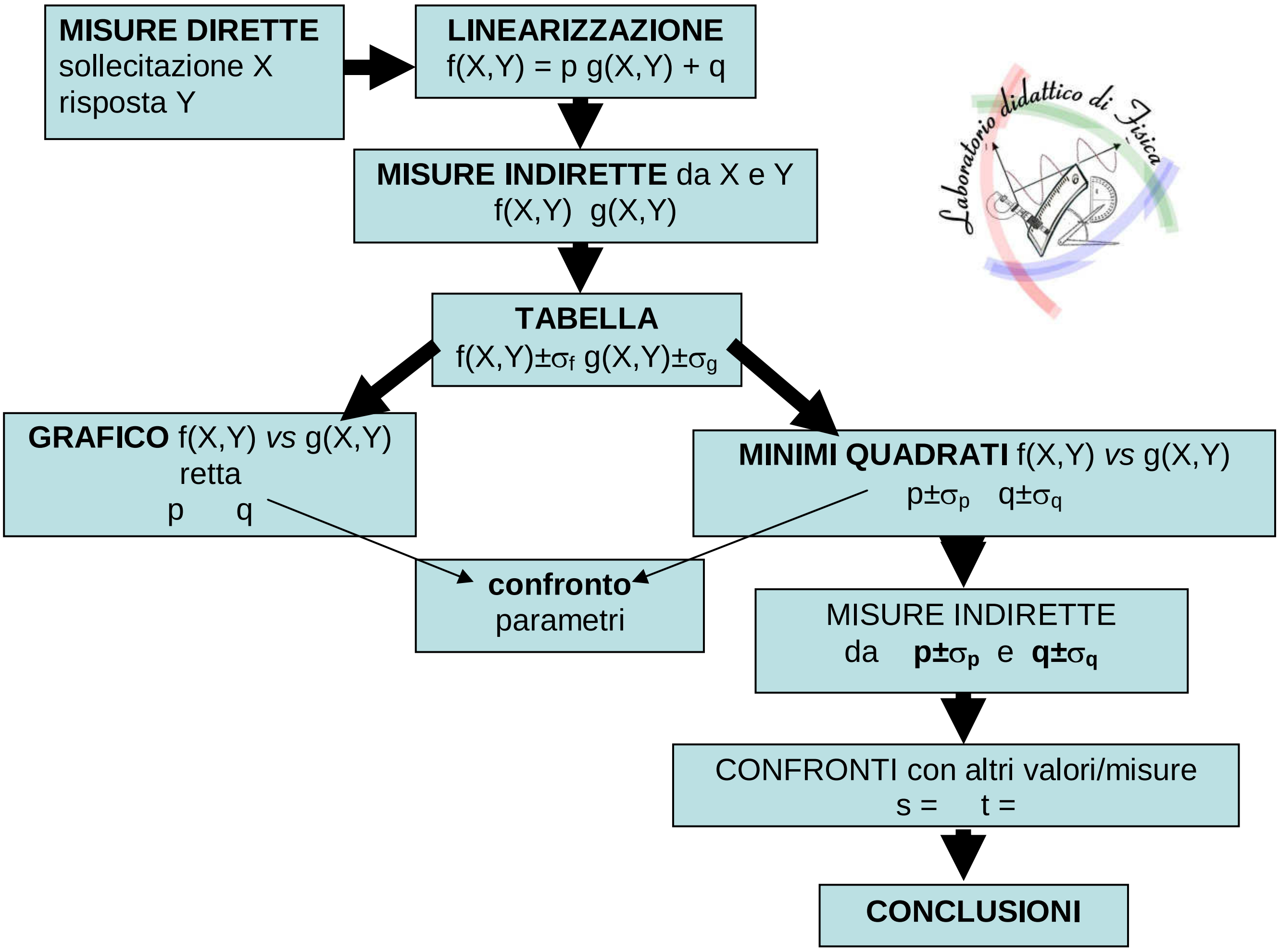
$$Y = cX_1^{p_1} X_2^{p_2} \ldots X_N^{p_N} \qquad \frac{\sigma(Y)}{Y} = \sqrt{\sum_{i=1,N} \left(p_i \frac{\sigma(X_i)}{X_i}\right)^2}$$

misure indirette

T = (13,2 ± 1,0) × 10^3 s simbolo - unità di misura - fattore moltiplicativo

2 cifre significative, stesse cifre decimali

notazioni


MISURE DIRETTE
sollecitazione X
risposta Y
LINEARIZZAZIONE
f(X,Y) = p g(X,Y) + q
MISURE INDIRETTE da X e Y
f(X,Y) g(X,Y)
TABELLA
f(X,Y)±σf g(X,Y)±σg
GRAFICO f(X,Y) vs g(X,Y)
retta
p q
MINIMI QUADRATI f(X,Y) vs g(X,Y)
p±σp q±σq
confronto
parametri
MISURE INDIRETTE
da p±σp e q±σq
CONFRONTI con altri valori/misure
s = t =
CONCLUSIONI