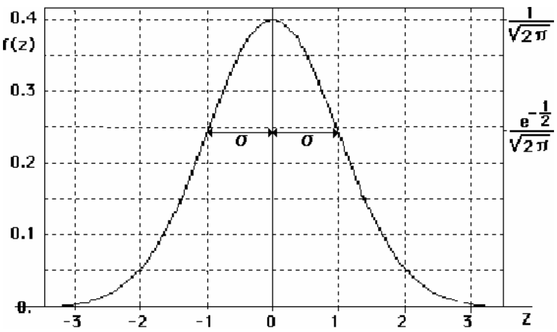
DISTRIBUZIONE DI GAUSS (o normale [26])

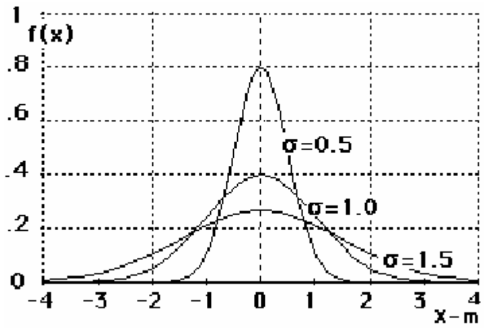
La densità di probabilità di Gauss è: $\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}$

Valore medio: $E(X) = \mathbf{m}$ **Varianza:** $\sigma^2(X) = \boldsymbol{\sigma}^2$

La distribuzione gaussiana è caratterizzata dai due parametri **m** e $\boldsymbol{\sigma}^2$:



dove z = (x-m)/σ



- la curva è simmetrica rispetto a X = m;
- ha due flessi in corrispondenza di X = m - σ e X = m + σ;
- il massimo della funzione (X = **m**) vale $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ (quantità detta modulo di precisione); perciò se raddoppia la σ (come succede, ad esempio, per un aumento dell'imprecisione di una misura), si dimezza il valore del massimo.

DERIVAZIONE DELLA DISTRIBUZIONE

Per capire l'origine della distribuzione supponiamo che il risultato ideale di una misura sia **m** e che un grande numero N di piccole cause indeterminate ne possano variare il valore ora aumentandolo, ora diminuendolo.
Supponiamo che l'entità della variazione sia la stessa Δm e che la probabilità che ogni effetto sommi o sottragga a m la quantità Δm sia1/2.
Se delle N cause, k hanno l'effetto di aggiungere ognuna Δm, le rimanenti N-k sottraggono la stessa quantità. Il risultato della nostra misura sarà quindi:

$$X = m + k\,\Delta m - (N-k)\,\Delta m.$$

Con queste posizioni X diventa una variabile aleatoria {P(X) = g[P(K)]} che nel limite per N→ ∞ e Δm→ 0 è continua.

Poiché k è una v.a. binomiale sappiamo che il suo valor medio è Np e quindi possiamo calcolare il valor medio di X:

$$E(X) = m + E(K)\,\Delta m - [N-E(K)]\,\Delta m = m + \tfrac{N}{2}\Delta m - [N-\tfrac{N}{2}]\,\Delta m = m.$$

Allo stesso modo, ma con una quantità di passaggi che non è il caso di riportare, si

26 distribuzione della "norma" o media

potrebbe vedere che, mantenendo costante la varianza σ^2 e facendo tendere N a ∞ e Δm a zero, la distribuzione di probabilità di X è:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}$$

In base a questa derivazione è intuitivo capire perché la distribuzione di Gauss sia simmetrica intorno a m (abbiamo supposto che con uguale probabilità si sommassero o sottraessero quantità Δm al valore m) e tenda a zero man mano che ci si discosti da m (la probabilità che k sia molto diverso da Np è piccola).

CARATTERISTICHE E RIASSUNTI

- Verifichiamo la proprietà di chiusura ricorrendo alla variabile ridotta $Z = \frac{X-m}{\sigma}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1$$ (integrale notevole[27])

- **Valore medio** m = **m**

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (z\sigma + m) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$= 0 + m = m$; (il primo integrale è nullo perché l'integrando è una funzione dispari; il secondo vale m perché, come già visto, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1$)

- **Varianza** $\sigma^2(X) = \boldsymbol{\sigma^2}$

Applichiamo la definizione di varianza:

$$\sigma^2(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz;$$

integrando per parti con $z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -z\, d(e^{-\frac{z^2}{2}})$ si ha $\sigma^2(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left| -z e^{-\frac{z^2}{2}} \right|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sigma^2$

- **FUNZIONE DEGLI ERRORI**

I livelli di confidenza relativi alla curva di Gauss non sono calcolabili analiticamente. Per questo motivo si ricorre a tabelle [28] che riportano il risultato dell'integrazione effettuata numericamente. Poiché la gaussiana è definita da due parametri per semplificare l'uso delle tabelle ci si riferisce alla variabile standardizzata Z=(X-m)/σ.

---

27 vedi il calcolo in appendice

28 in appendice ne è riportato un esempio

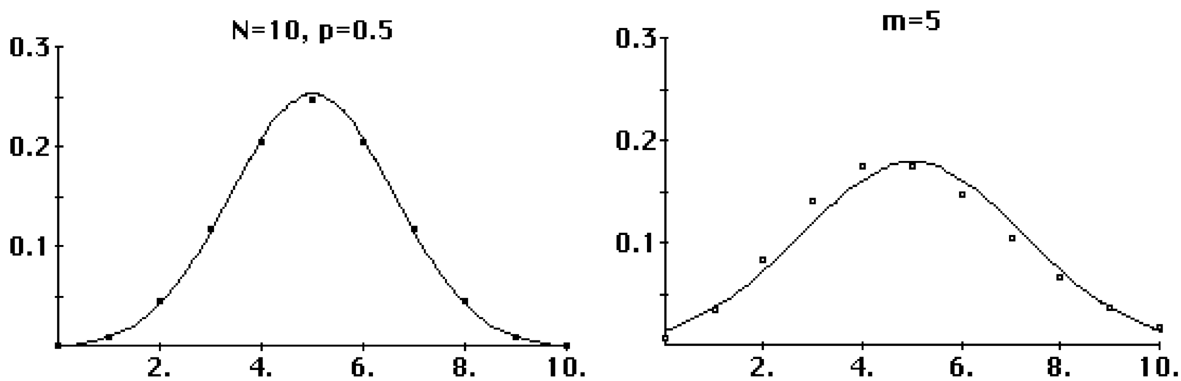
La funzione $f(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z'^2}{2}} dz'$ è detta funzione degli errori (ERF); l'origine del nome è evidente se si riflette sulla derivazione della distribuzione: la gaussiana è la distribuzione degli errori casuali.

Alcuni livelli di confidenza notevoli sono:

$$\mathbf{P(m - 1\,\sigma \le X \le m + 1\,\sigma) = P(-1{,}0 \le Z \le 1{,}0) = 68{,}3\ \%}$$
$$P(m - 2\,\sigma \le X \le m + 2\,\sigma) = P(-2{,}0 \le Z \le 2{,}0) = 95{,}4\ \%$$
$$P(m - 3\,\sigma \le X \le m + 3\,\sigma) = P(-3{,}0 \le Z \le 3{,}0) = 99{,}7\ \%$$

CONFRONTI CON ALTRE DISTRIBUZIONI

Avevamo accennato in precedenza alla derivazione della distribuzione di Gauss dalla binomiale; nella figura di sinistra è mostrato il confronto fra una binomiale (punti) con i due parametri N = 10; p = 0,5 e una gaussiana (linea) con m = 5 e σ^2 = 2,5 (cioè la stessa media e varianza della binomiale). Nella figura di destra, invece, è mostrato come per m molto elevato la distribuzione di Poisson tenda a quella di Gauss: nell'esempio è riportata una poissoniana (punti) con m = 5 confrontata con una gaussiana (linea) con m = σ^2 = 5.



Bisogna prestare attenzione al fatto che mentre le distribuzioni di Bernoulli e di Poisson sono relative a v.a. discrete, quella di Gauss è valida per v.a. continue. Perciò la scala riportata in ordinata in questi esempi va intesa come probabilità in un caso (punti per la binomiale o la poissoniana) e densità di probabilità nell'altro (linea continua della gaussiana).

DISTRIBUZIONE t DI STUDENT

Se $\overline{X}$ è distribuita gaussianamente[29], allora la variabile aleatoria $t = \dfrac{(\overline{X}-m)}{\sigma_S(\overline{X})} = \dfrac{(\overline{X}-m)}{\dfrac{\sigma_s(X)}{\sqrt{N}}}$

con $\sigma_s^2(X) = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1,N}(x_i-\overline{X})^2}{N-1}}$ segue la distribuzione di Student con $\nu = N - 1$ gradi di libertà:

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

dove Γ è la funzione gamma di Eulero che rappresenta l'estensione, al continuo, del fattoriale: se $n \geq 1$ è un intero allora

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(n) = (n-1)!$
- $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}-1\right)\left(n-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

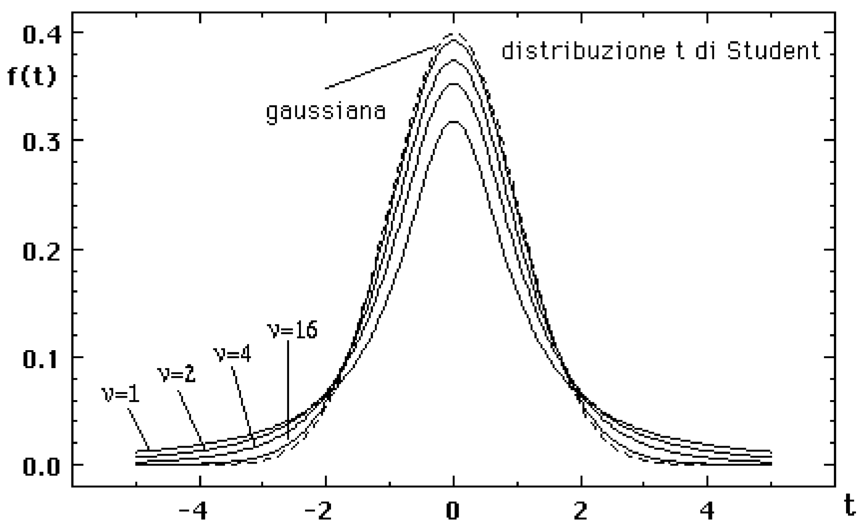
Valore medio: $E(t) = 0$ **Varianza:** $\sigma^2(t) = \dfrac{\nu}{\nu-2}$ (valida per $\nu > 2$)

- t è definita nell'intervallo [- ∞; ∞]

- f(t) è simmetrica rispetto alla media

- la distribuzione t-Student dipende solo dal numero di gradi di libertà ν

- per $\nu \to \infty$ la distribuzione tende a quella di Gauss ma già per $\nu \approx 10$ il grado di approssimazione è notevole:



[29] come spesso accade in base al teorema del limite centrale

La funzione cumulativa si trova spesso tabulata. Il suo uso riguarda il calcolo del livello di confidenza relativo alla media aritmetica quando di questa non si conosca la varianza ma solo la varianza stimata.
Ad esempio in questa tabella è riportato, per vari valori del numero di gradi di libertà ν, il numero di deviazioni standard intorno alla media che definisce un intervallo di confidenza corrispondente ai livelli di confidenza del 90%, 95% e 99%. Ovviamente il caso di infiniti gradi di libertà coincide con la distribuzione di Gauss.

t-Student

ν	90%	95%	99%	
1	6,31	12,71	63,66	
2	2,92	4,30	9,92	
3	2,35	3,18	5,84	
4	2,13	2,78	4,60	
5	2,02	2,57	4,03	
6	1,94	2,45	3,71	
7	1,89	2,36	3,50	
8	1,86	2,31	3,36	
9	1,83	2,26	3,25	
10	1,81	2,23	3,17	
15	1,75	2,13	2,95	
20	1,72	2,09	2,85	
25	1,71	2,06	2,79	
30	1,70	2,04	2,75	
50	1,68	2,01	2,68	
100	1,66	1,98	2,63	
∞	1,65	1,96	2,58	← gaussiana

Per esempio consideriamo una serie di 10 misure di lunghezza con media aritmetica $\overline{X} = 92$ cm e deviazione standard stimata della media aritmetica $\sigma_S(\overline{X}) = 7{,}89$ cm.
Se anziché stimare la $\sigma(\overline{X})$ fossimo in grado di conoscerla, il risultato della nostra misura espresso come $\overline{X} \pm \sigma(\overline{X})$ corrisponderebbe ad un livello di confidenza del 68,3% (Gauss). Invece, non conoscendo la $\sigma(\overline{X})$ ma potendo solo stimarla con $\sigma_S(\overline{X})$ dobbiamo usare più correttamente la distribuzione di Student con 10-1 = 9 gradi di libertà.
La tabella riportata si utilizza nel seguente modo: se vogliamo ottenere un livello di confidenza del 90% occorre un intervallo di confidenza $\overline{X} \pm 1{,}85\ \sigma_S(\overline{X})$ che nel nostro esempio corrisponde a m = (92 ± 15) cm.

Più frequentemente le tabelle a disposizione sono del tipo riportato in appendice dove anziché il livello di confidenza intorno alla media si considera la funzione cumulativa.

Su questa distribuzione si può basare un test statistico di confronto fra misure per accettare o rigettare l'ipotesi di distribuzione gaussiana dei risultati (e quindi di presenza dei soli errori casuali)

DISTRIBUZIONE DEL χ^2 (chi-quadro).

Se X_1, X_2, ..., X_ν sono ν v.a. gaussiane indipendenti con media nulla e varianza unitaria (come è il caso delle variabili standardizzate), la variabile aleatoria $U = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_\nu^2$ segue una distribuzione detta del χ^2 con ν gradi di libertà.

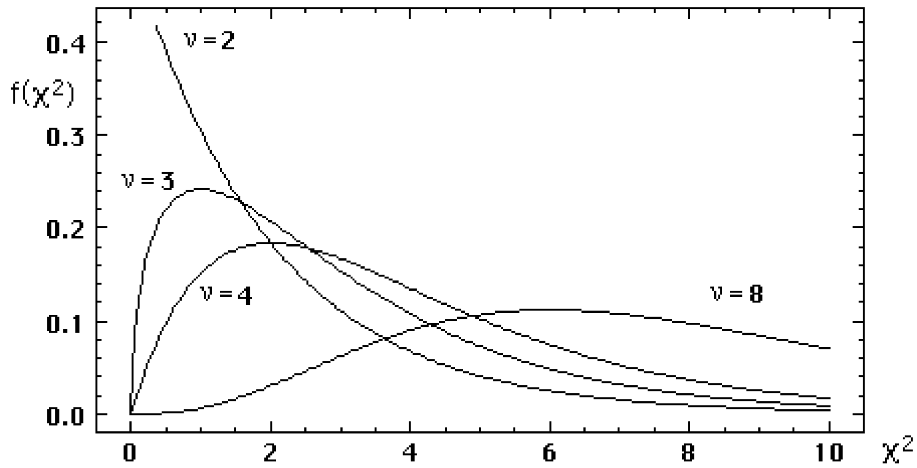
È oltre gli scopi del corso ricavare la densità di probabilità del χ^2:

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

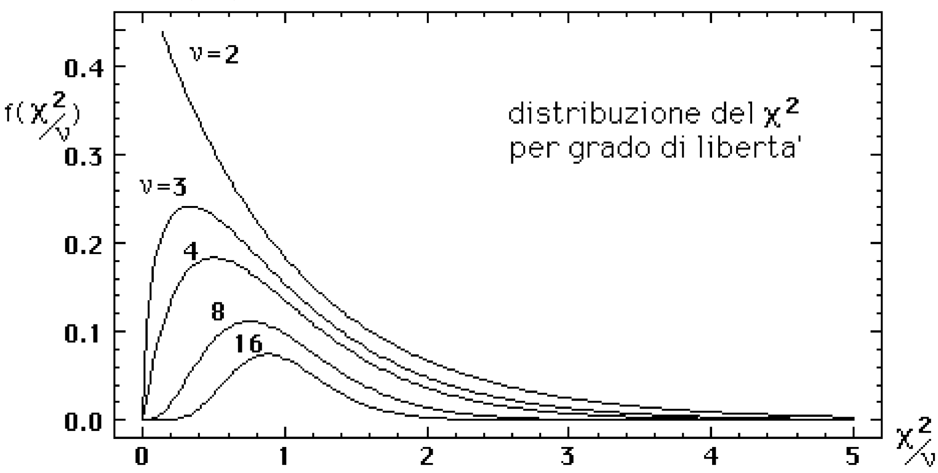
dove Γ è la funzione gamma di Eulero.

Valore medio: $E(\chi^2) = \nu$ **Varianza:** $\sigma^2(t) = 2\nu$

- Poiché χ^2 è una somma di termini positivi la sua funzione di distribuzione è definita nell'intervallo $[0,\infty]$.
- Questa distribuzione dipende da un solo parametro: il numero di gradi di libertà ν.
- Per $\nu \to \infty$ la distribuzione del χ^2 tende a quella di Gauss. Quindi, se il numero di gradi di libertà è elevato, in assenza di tabelle della funzione cumulativa del χ^2, si può utilizzare quella della gaussiana (sigmoide) o le tabelle ERF.

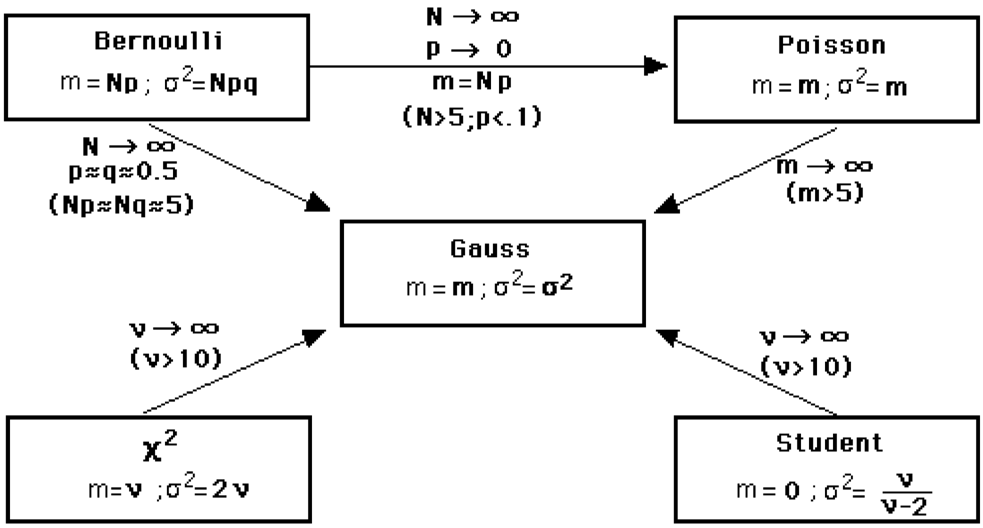


Spesso si considera la $f\left(\frac{\chi^2}{\nu}\right)$ il cui valore medio è unitario:



Su questa distribuzione si basa un test statistico (test del χ^2) di notevole importanza

Il diagramma seguente riporta i riassunti delle distribuzioni che abbiamo esaminato ed indica con quali approssimazioni possono essere sostituite l'una all'altra:



ALTRE DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

In fisica esistono numerosissimi esempi di altre distribuzioni di probabilità. Lo studio delle loro caratteristiche e riassunti procede nello stesso modo utilizzato con le distribuzioni già studiate.
Come esempio consideriamo la distribuzione delle velocità delle molecole in un gas in equilibrio termico elaborata da Maxwell-Boltzmann secondo i quali la probabilità che una molecola possieda una velocità compresa fra v e v + dv è $dP = f(v)\,dv$ con

$$\boxed{f(v) = c\, v^2\, e^{-a v^2}} \qquad \text{dove la costante a vale } a = \frac{\frac{1}{2}m}{KT}$$

Caratteristiche e riassunti

- La velocità per la quale si ha il massimo della funzione (valore più probabile) si ottiene in corrispondenza di $v = v_p = \frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{2KT}{m}}$ (è sufficiente uguagliare a zero la derivata di f(v))

- A partire dalla proprietà di chiusura ricaviamo il valore della costante c:

$$\int_0^\infty c\, v^2 e^{-a v^2} dv = c\sqrt{\frac{\pi}{16\, a^3}} = 1 \text{ da cui } c = \sqrt{\frac{16\, a^3}{\pi}}$$

- Valore medio

$$E(V) = \sqrt{\frac{16\, a^3}{\pi}} \int_0^\infty v^3 e^{-a v^2} dv = \sqrt{\frac{16\, a^3}{\pi}}\, \frac{1}{2a^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} = 1{,}128\, v_p.$$

- Varianza

$$\sigma^2(V) = E(V^2)\text{-}[E(V)]^2 = \sqrt{\frac{16\, a^3}{\pi}} \int_0^\infty v^4 e^{-a v^2} dv - \left(\frac{2}{\sqrt{\pi a}}\right)^2 = \sqrt{\frac{16\, a^3}{\pi}}\sqrt{\frac{9\pi}{64 a^5}} - \frac{4}{\pi a} = \frac{3}{2a} - \frac{4}{\pi a}$$

TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

L'enunciato di questo importante teorema, in una delle sue formulazioni, è:

se X_1, X_2, ...,X_N sono N v.a. indipendenti con media e varianza dello stesso ordine di grandezza e di distribuzione qualsiasi,

allora la variabile aleatoria $Y = X_1+X_2+...+X_N$ ha una distribuzione di probabilità che per $N \to \infty$ tende ad essere gaussiana.

Inoltre, se le variabili X_i seguono una distribuzione gaussiana allora anche Y segue una distribuzione gaussiana indipendentemente da N (è ovvio se N = 1).

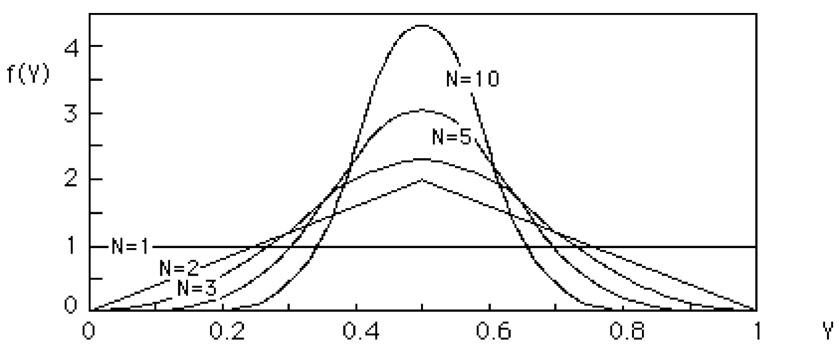
La dimostrazione del teorema va oltre i limiti di questo corso ma è bene soffermarsi sul significato dell'enunciato: se il risultato di una misura è determinato dalla concorrenza di un numero N elevato di fenomeni microscopici che, ognuno con la sua distribuzione di probabilità, alterano la grandezza in esame, la v.a. che rappresenta il risultato della misura tenderà ad avere una distribuzione di tipo gaussiano. Per questo motivo acquista una particolare importanza la distribuzione di Gauss: è, generalmente, la distribuzione delle misure (funzione degli errori).

Analogamente la media aritmetica di N variabili aleatorie X_i segue una distribuzione gaussiana (per $N \to \infty$) indipendentemente da quale sia la distribuzione di partenza.
Quindi, avendo eseguito più misure di una stessa grandezza, la media aritmetica di tali misure tende ad avere una distribuzione gaussiana tanto più quanto più è elevato il numero delle misure effettuate.

Come esempio consideriamo N v.a. X_1, X_2, ..., X_N distribuite uniformemente fra 0 e 1 per cui $E(X_i) = 0,5$ e $\sigma(X_i) = 1/\sqrt{12}$. Della funzione $Y = \frac{\sum X_i}{N}$ abbiamo appreso:

- il valore atteso di Y è $E(Y) = E(X_i) = 0,5$
- la varianza di Y vale $\sigma^2(Y) = \frac{\sigma^2(X_i)}{N}$; quindi $\sigma^2(Y)$ diminuisce al crescere di N.
- per il teorema del limite centrale se N è elevato Y ha una distribuzione gaussiana.

In figura sono riportate le densità di probabilità di Y al variare di N:
per N = 1 la distribuzione è uniforme e già per N ≈ 10 la distribuzione è pressoché gaussiana.



La convergenza verso la curva di Gauss è ovviamente più rapida per funzioni con un andamento a campana o almeno con un valore centrale più probabile (come avviene spesso nel corso di misure). L'esempio delle distribuzioni uniformi mostra tuttavia come tale convergenza sia rapida anche per distribuzioni senza un massimo pronunciato.

INTERVALLI E LIVELLI DI CONFIDENZA

- Lo scopo di ogni misurazione è quello di ottenere la miglior stima del valore vero del misurando. Supponiamo di aver prodotto ogni sforzo nell'individuare, eliminare o ridurre, gli errori sistematici. La presenza degli errori casuali produce tuttavia diversità nei risultati delle misurazioni di cui teniamo conto mediante l'elaborazione statistica dei dati.

Alla fine otteniamo un risultato; quanto siamo confidenti nella possibilità che il valore ottenuto sia rappresentativo del valore vero?

Date le premesse occorrono due considerazioni:

1) dobbiamo ritenere nulli o trascurabili gli effetti sistematici perché non siamo in grado di produrre nessuna previsione se essi sono ancora presenti. Perché ciò sia lecito dobbiamo aver considerato sotto ogni ragionevole aspetto tutta la procedura della misurazione, la strumentazione, la presenza di fattori potenzialmente influenti, la correttezza di ogni assunzione, dei valori numerici di eventuali costanti e dei calcoli numerici. Se non siamo stati direttamente noi ad eseguire la misurazione dobbiamo poter verificare la qualità dei controlli effettuati dagli altri nel tentativo di individuare le cause di errori sistematici.

2) la natura intrinsecamente aleatoria degli errori casuali non ci consentirà di produrre una risposta quantitativa se non in termini probabilistici.

A questo proposito occorre considerare che gli errori sistematici, pur non alterando la stima della varianza, altererebbero quella del valore atteso (assunto come valor vero).
Infatti, se ogni misura X_i viene alterata per un termine costante c la media aritmetica viene alterata della stessa quantità:

$$\frac{\sum(X_i + c)}{N} = \frac{\sum X_i}{N} + c = \overline{X} + c$$

mentre la varianza $\frac{\sum\left[(X_i + c) - (\overline{X} + c)\right]^2}{N-1} = \frac{\sum\left[X_i - \overline{X}\right]^2}{N-1} = \sigma_S^2(X)$ resta inalterata.

Da qui discende la pericolosità degli errori sistematici: non vengono evidenziati, come gli errori casuali, da una grande varianza; la loro identificazione può avvenire solo confrontando misure ottenute in condizioni diverse (per evidenziare diverse costanti c nelle diverse medie aritmetiche).

- Quando indichiamo il risultato di una misurazione con la notazione m = $\overline{X} \pm \sigma_s(\overline{X})$ stiamo indicando l'**intervallo** $[\overline{X} - \sigma_s(\overline{X}) ; \overline{X} + \sigma_s(\overline{X})]$ (**intervallo di confidenza**) all'interno del quale riteniamo che, compatibilmente con i risultati ottenuti, si trovi, con una determinata **probabilità** (**livello di confidenza**), il valore vero **m**.

C'è da precisare che **m** non è una variabile aleatoria. Più correttamente la probabilità si riferisce all'intervallo $m \pm \sigma_s(\overline{X})$ all'interno del quale si può trovare $\overline{X}$ che è invece una variabile aleatoria:

$$\boxed{m - \sigma_S(\overline{X}) < \overline{X} < m + \sigma_S(\overline{X}) \Leftrightarrow |\overline{X} - m| < \sigma_S(\overline{X}) \Leftrightarrow \overline{X} - \sigma_S(\overline{X}) < m < \overline{X} + \sigma_S(\overline{X})}.$$

Anche se in molti campi si è convenzionalmente deciso di riportare i risultati sotto forma di intervalli di confidenza di ± σ intorno alla media aritmetica (da qui è possibile definire qualsiasi altro intervallo di confidenza) a volte occorre conoscere il livello di confidenza.

Questa richiesta (il livello di confidenza altri non è che la probabilità che la v.a. X sia all'interno di un dato intervallo) può essere soddisfatta solo qualora sia nota la distribuzione di probabilità associata al valore numerico della misura.

Non è banale ricavare da un esperimento la distribuzione di probabilità della misura: occorre produrre un campione di misure (sotto condizioni di ripetibilità) così elevato per cui le fluttuazioni statistiche non possono confondere l'andamento delle frequenze. Del resto anche in presenza di un campione di grandi dimensioni, il teorema di Bernoulli (legge forte dei grandi numeri) ci garantisce solo probabilisticamente che la frequenza relativa coincide con la probabilità.

Spesso, però, non è richiesta un'elevata precisione nel calcolo dei livelli di confidenza cioè non è necessario conoscere perfettamente la distribuzione madre dalla quale abbiamo ricavato il campione delle nostre misure.
Per il calcolo approssimato dei livelli di confidenza si può considerare che:

1) anche se il risultato di una misura non segue una distribuzione gaussiana, molto spesso l'effetto degli errori casuali tende a produrre una curva grossolanamente simmetrica con un valore centrale assai più frequente.
2) la media aritmetica anche di poche misure approssima assai bene la curva di Gauss (se ciò succede rapidamente con variabili distribuite uniformemente a maggior ragione ciò accade con i risultati di misurazioni)

Sotto questo aspetto, allora, molte distribuzioni di dati si somigliano avendo un valore centrale più frequente e un andamento grossolanamente simmetrico che ricordano la curva di Gauss consentendo l'uso di tabelle di ERF.
Ovviamente per piccoli campioni come nel caso di 3 - 4 misure la stima $\sigma_s(\overline{X})$ di $\sigma(\overline{X})$ è troppo approssimativa e più correttamente il livello di confidenza va calcolato seguendo la distribuzione di Student.

- **Perché spesso non occorre calcolare il livello di confidenza e ci si limita ad indicare solo un intervallo di confidenza?**

Perché, come già detto, le distribuzioni delle misure sono approssimativamente gaussiane e quindi i livelli di confidenza per le medie aritmetiche, grazie al teorema del limite centrale, non variano moltissimo fra un caso e l'altro.

Questa affermazione trova la sua giustificazione[30] in tabelle tipo la seguente dove i valori 3, 5, 10 e 20 sono ottenuti dalla distribuzione di Student:

N	$P\left(\left\lvert\overline{X}-m\right\rvert \le \sigma_S(\overline{X})\right)$	$P\left(\left\lvert\overline{X}-m\right\rvert \le 2\sigma_S(\overline{X})\right)$	$P\left(\left\lvert\overline{X}-m\right\rvert \le 3\sigma_S(\overline{X})\right)$
3	60,9%	86,0%	94,3%
5	63,5%	89,8%	97,0%
10	65,8%	92,7%	98,7%
20	67,0%	94,1%	99,3%
∞ = Gauss	68,3%	95,4%	99,7%
Chebychev	$\ge$ 0 %	$\ge$ 75,0%	$\ge$ 88,9%

L'ultima riga riporta quanto si otterrebbe senza imporre nessuna condizione sulla distribuzione della media aritmetica (disuguaglianza di Chebychev)[31].

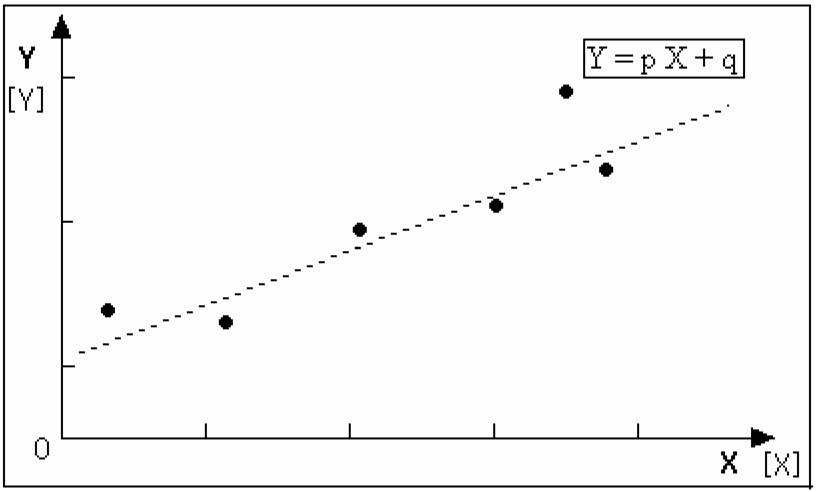
30 come si può notare, per esempio dalla prima colonna, i livelli di confidenza variano poco al crescere delle misure

31 in realtà la disuguaglianza di Chebychev utilizza media e varianza e non le loro stime e quindi richiede implicitamente infinite misure

IL METODO DEI MINIMI QUADRATI

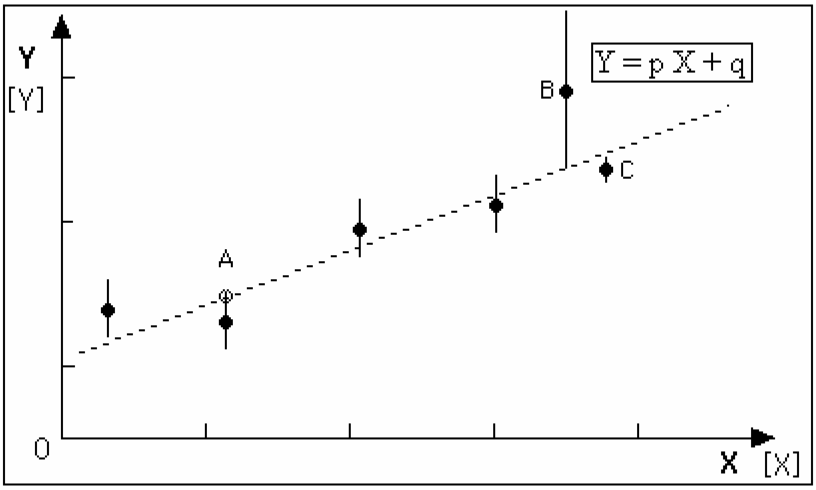
Supponiamo di voler studiare un sistema fisico ma di conoscerlo già a un livello tale da poter prevedere che se viene sottoposto alla sollecitazione X esso produrrà una risposta Y secondo la legge $\boxed{Y = \mathbf{p}\ X + \mathbf{q}}$ dove **p** e **q** sono due parametri incogniti, scopo della nostra misura. Per ogni valore X_i della sollecitazione X (con i = 1, N valori diversi) eseguiamo una misura Y_i della risposta Y.

Vediamo come si presenterebbe un grafico delle N coppie di valori (X_i,Y_i) avendo tratteggiato la retta **Y = p X + q** della quale per il momento ancora non conosciamo i valori di **p** e **q**:



Poiché i punti su questo grafico rappresentano delle misure (quindi affette da errori) la retta (funzione analitica) non passerà per tutti i punti sperimentali anche se la nostra schematizzazione della legge fisica fosse corretta.

Per chiarire meglio il ruolo delle incertezze aggiungiamo ad ogni punto un segmento la cui semilarghezza è pari all'incertezza della misura[32]:



Come esempio esaminiamo ora in dettaglio il punto A e calcoliamo la distanza $\mathbf{u_i}$ del valore Y_i misurato direttamente (cerchio pieno) da $Y(X_i)$ stimato a partire dalla conoscenza di X_i

[32] non si perde in generalità del metodo e si ottengono sostanzialmente gli stessi risultati se si ipotizza che le sollecitazioni X_i siano affette da errori trascurabili

(cerchio vuoto). Essa potrebbe aiutarci per stimare i parametri **p** e **q** (poiché le Y_i fluttuano intorno ai valori $Y(X_i) = p\,X_i + q$, **più è piccola la distanza $u_i = Y_i - Y(X_i) = Y_i - (p\,X_i + q)$ e migliore sarà stata la nostra stima dei parametri**).

Dovendo dare una valutazione complessiva della distanza di tutti i punti dalla retta potremmo sommare tutte le distanze u_i delle Y_i dalle $Y(X_i)$.
Per evitare compensazioni di differenze positive e negative è però preferibile utilizzare il modulo della differenza o meglio ancora la somma dei quadrati delle distanze [33]:

$$U = \sum u_i^2 = \sum_{i=1,N} [Y_i - (pX_i + q)]^2$$

Tuttavia se esaminiamo i punti B e C notiamo che mentre la distanza dalla retta del punto B è superiore a quella del punto C, l'incertezza della misura del punto B è molto più elevata e quindi quest'ultima deve influenzare la nostra stima meno di quanto non debba fare il punto C che è meglio determinato.
Per questo motivo qualora le diverse determinazioni di Y abbiano incertezze diverse[34] (valutate come σ_i), viene definita la variabile:

$$\boxed{U = \sum u_i^2 = \sum \left(\frac{Y_i - (pX_i + q)}{\sigma_i} \right)^2} \quad [35]$$

dove u_i rappresenta ancora la distanza di Y_i da $Y(X_i)$ ma, essendo divisa per la deviazione standard, viene attribuito un maggior peso alle misure con incertezza minore; si comporta cioè come una variabile ridotta (standardizzata).

Il metodo dei minimi quadrati consiste nella minimizzazione di U al variare dei parametri p e q: quanto più U è piccolo, tanto più la retta stimata passa nelle vicinanze dei punti sperimentali.

I valori dei parametri che minimizzano U costituiscono la nostra stima; si ottengono imponendo che le derivate parziali di U rispetto ai parametri **p** e **q** siano nulle:

$$\frac{\partial U}{\partial p} = \sum \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{Y_i - (pX_i + q)}{\sigma_i} \right)^2 = -2 \sum X_i \frac{Y_i - (pX_i + q)}{\sigma_i^2} =$$

$$= -2 \sum \frac{X_i Y_i}{\sigma_i^2} + 2p \sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2} + 2q \sum \frac{X_i}{\sigma_i^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial q} = \sum \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{Y_i - (pX_i + q)}{\sigma_i} \right)^2 = -2 \sum X_i \frac{Y_i - (pX_i + q)}{\sigma_i^2} =$$

$$= -2 \sum \frac{Y_i}{\sigma_i^2} + 2p \sum \frac{X_i}{\sigma_i^2} + 2q \sum \frac{1}{\sigma_i^2}$$

---

33 in realtà la scelta della funzione U si basa su argomentazioni ben più solide di queste. La loro discussione, tuttavia, è oltre gli scopi di questo corso.

34 in questo caso, in corrispondenza di ogni valore X_i della sollecitazione X andranno effettuate più misure della risposta Y_i in modo da ricavarne sia una media che una varianza (media aritmetica e incertezza corrispondente)

35 qualora le Y_i avessero una distribuzione gaussiana e i parametri **p** e **q** fossero noti, U seguirebbe la distribuzione del χ^2 con N gradi di libertà; poiché invece ricaveremo le stime dei parametri dai dati, i gradi di libertà saranno N-2. Il test del χ^2 potrà essere utilizzato per quantificare la bontà della stima dei parametri.

ponendo $\left.\frac{\partial U}{\partial p}\right\|_{p_S, q_S} = 0$ si ottiene:	$\sum \frac{X_i Y_i}{\sigma_i^2} = p_S \sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2} + q_S \sum \frac{X_i}{\sigma_i^2}$
e da $\left.\frac{\partial U}{\partial q}\right\|_{p_S, q_S} = 0$ si ottiene:	$\sum \frac{Y_i}{\sigma_i^2} = p_S \sum \frac{X_i}{\sigma_i^2} + q_S \sum \frac{1}{\sigma_i^2}$

dove p_S e q_S rappresentano le stime rispettivamente di **p** e **q.**

Si è così ottenuto un sistema di due equazioni nelle due incognite p_S e q_S dalla cui risoluzione si ottengono:

$$p_S = \frac{\sum \frac{X_i Y_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} - \sum \frac{X_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{Y_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} - \sum \frac{X_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{X_i}{\sigma_i^2}} \qquad q_S = \frac{\sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2} \sum \frac{Y_i}{\sigma_i^2} - \sum \frac{X_i Y_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{X_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} - \sum \frac{X_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{X_i}{\sigma_i^2}} \quad \textbf{(A-1)}$$

I valori di p_S e q_S sono affetti da un'incertezza dovuta alle incertezze delle singole misure di Y_i ma, poiché p_S e q_S sono funzioni lineari delle variabili aleatorie Y_i [36] è possibile, applicando la formula di propagazione delle incertezze in modo esatto, stimare "facilmente" la loro varianza ottenendo:

$$\sigma^2(p_s) = \frac{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}}{\left(\sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} - \sum \frac{X_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{X_i}{\sigma_i^2}\right)} \qquad \sigma^2(q_s) = \frac{\sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2}}{\left(\sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} - \sum \frac{X_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{X_i}{\sigma_i^2}\right)} \quad \textbf{(A-2)}$$

Le relazioni (A) consentono la misura dei parametri della retta dei minimi quadrati ma risultano un poco complesse dal punto di vista del calcolo. Vediamo ora in quali casi è possibile semplificarle e in che modo.

- Se per le misure di Y lo stesso operatore utilizza lo stesso metodo e gli stessi strumenti è lecito ritenere che gli errori di misura e quindi le varianze delle Y_i siano tutte uguali fra loro[37].

In questo caso, considerando che $\sigma_i^2 = \sigma^2$, la funzione da minimizzare è:

$$\boxed{U = \sum u_i^2 = \sum \left(\frac{Y_i - (pX_i + q)}{\sigma} \right)^2}$$

36 le X_i non sono v.a. perché abbiamo supposto trascurabile la loro varianza (i segmenti esprimenti l'incertezza sono solo nella direzione verticale); anche le σ_i non sono v.a. nella misura in cui le riteniamo note anziché stimate dai dati

37 non si tratta di un caso raro, anzi, nella grande maggioranza dei casi le incertezze non si discostano per più di un fattore 2-3 consentendo l'uso delle formule semplificate B

e con pochi passaggi si ottengono (è un esercizio che si raccomanda caldamente) le equazioni:

$$\boxed{p_S = \frac{N\sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{N\sum X_i^2 - \sum X_i \sum X_i} \qquad q_S = \frac{\sum X_i^2 \sum Y_i - \sum X_i Y_i \sum X_i}{N\sum X_i^2 - \sum X_i \sum X_i}} \qquad \textbf{(B-1)}$$

che si sarebbero potute ricavare dalle **(A-1)** ponendo le $\sigma_i^2 = \sigma^2$.

Anche in questo caso la formula di propagazione delle incertezze ci consente di calcolare le incertezze da associare alle stime dei parametri:

$$\sigma^2(p_s) = \sum_j \left(\frac{\partial p_S}{\partial Y_j}\right)^2 \sigma^2(Y_j) = \sum_j \left(\frac{\partial p_S}{\partial Y_j}\right)^2 \sigma^2 = \sum_j \left(\frac{NX_j - \sum X_i}{N\sum X_i^2 - \sum X_i \sum X_i}\right)^2 \sigma^2 =$$

$$= \frac{\sum_j \left[N^2 X_j^2 - 2NX_j \sum X_i + (\sum X_i)^2\right]}{\left[N\sum X_i^2 - \sum X_i \sum X_i\right]^2}\sigma^2 = \frac{N^2 \sum X_j^2 - 2N\sum X_j \sum X_i + N(\sum X_i)^2}{\left[N\sum X_i^2 - \sum X_i \sum X_i\right]^2}\sigma^2 =$$

$$= \frac{N\left[N\sum X_i^2 - \sum X_i \sum X_i\right]}{\left[N\sum X_i^2 - \sum X_i \sum X_i\right]^2}\sigma^2 = \boxed{\frac{N}{N\sum X_i^2 - \sum X_i \sum X_i}\sigma^2} = \boxed{\frac{\sigma^2}{N\left(\frac{\Sigma X_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X_i}{N}\right)^2\right)}} \qquad \textbf{(B-2)}$$

Analogamente si ricava: $\sigma^2(q_S) = \boxed{\frac{\sum X_i^2}{N\sum X_i^2 - \sum X_i \sum X_i}\sigma^2} = \boxed{\frac{\frac{\Sigma X_i^2}{N}\sigma^2}{N\left(\frac{\Sigma X_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X_i}{N}\right)^2\right)}}$ **(B-2)**

Ora non resta che stimare dai dati a disposizione la varianza delle Y_i che abbiamo supposto essere indipendente da Y_i e pari a σ^2.

Per questo scopo consideriamo la quantità $\frac{\sum [Y_i - (pX_i + q)]^2}{N}$; essa rappresenta la media aritmetica del quadrato degli scarti delle Y_i dai valori $\mathbf{pX_i + q}$ attesi in base alle X_i; in altre parole se N tendesse ad infinito sarebbe la solita definizione di varianza.

Poiché non conosciamo **p** e **q** ma solo le loro stime p_S e q_S una stima non distorta di σ^2 è:

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\sum [Y_i - (p_S X_i + q_S)]^2}{N-2}} \qquad \textbf{(B-3)}$$

(N-2 perché questa volta ci sono due relazioni (p_s e q_s) che legano fra loro le v.a. Y_i).

Le relazioni (B) consentono la misura[38] **dei parametri della retta dei minimi quadrati nel caso di incertezze uguali.**

38 molte calcolatrici hanno memorizzate le relazioni (B-1) (retta di regressione). Consiglio vivamente di prendere confidenza con le funzioni statistiche implementate nella vostra calcolatrice perché il risparmio di tempo è decisamente notevole e la probabilità di sbagli si riduce drasticamente

• Consideriamo <u>temporaneamente</u> i valori X_i come fossero determinazioni di una variabile aleatoria X distribuita con varianza σ_X^2 intorno a $\overline{X}$ (in realtà siamo noi che decidiamo con quali valori X_i della grandezza X sollecitiamo il sistema). In questo caso si avrebbe $\sigma_X^2 = \frac{\sum X_i^2}{N} - \left(\frac{\sum X_i}{N}\right)^2$ da cui si ottiene rapidamente $N^2\sigma_X^2 = N\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2$ cioè il denominatore nelle espressioni delle formule dei minimi quadrati. Ponendo $\sigma_Y = \sigma$, con qualche passaggio si ricavano:

$$\boxed{\sigma_{p_s} = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{N}\,\sigma_X} \qquad \sigma_{q_s} = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{N}\,\sigma_X}\sqrt{\sigma_X^2 + \overline{X}^2}} \qquad \textbf{(B-2)}$$

Da questa riscrittura[39] delle incertezze dei parametri della retta dei minimi quadrati risulta evidente come convenga sollecitare un sistema per studiarlo.
Infatti, volendo minimizzare le incertezze si può agire in tre direzioni: ridurre l'imprecisione nelle misure della risposta Y (piccola σ_Y), aumentare il numero di misure N, sollecitare il sistema con valori X_i quanto più possibile largamente distribuiti (grande σ_X) e, se possibile con valori sia positivi che negativi ($\overline{X}$ quasi nullo).

• <u>Generalizziamo</u> quanto esaminato finora al caso di una funzione di ordine più elevato: schematizziamo il nostro fenomeno con una grandezza Y che dipende dalla grandezza X e da un certo numero di parametri non misurati o non misurabili $q_1, q_2, \ldots q_m$:

$$Y = f(X; q_1, q_2, \ldots, q_m)$$

Per ognuna delle N sollecitazioni X_i della grandezza X supponiamo di aver effettuato una serie di misure del corrispondente valore assunto dalla grandezza Y e di averne determinata l'incertezza:

X_1	Y_1	σ_1
X_2	Y_2	σ_2
...	...	...
X_N	Y_N	σ_N

Analogamente al caso della retta si minimizza la quantità

$$\boxed{U = \sum\left(\frac{Y_i - f(X_i; q_1, q_2, \cdots, q_m)}{\sigma_i}\right)^2}$$

derivandola rispetto agli m parametri q.
Dal sistema di m equazioni (ci sono m derivate) in m incognite (gli m parametri) si ricavano le stime dei parametri q.

In pratica è raro che il metodo dei minimi quadrati venga utilizzato per funzioni più complesse della parabola perché si preferiscono in quel caso altri metodi di stima dei parametri.

---

39 se da un lato le formule scritto in questo modo sono di facile memorizzazione, dall'altro possono confondere lo studente disattento in quanto σ_X non è la deviazione standard di X (che non è una variabile aleatoria) ma solo una relazione fra i diversi valori di X_i

- Un <u>caso particolare</u> di applicazione dei minimi quadrati[40] è rappresentato dalla stima della pendenza di una retta passante per l'origine:

$$Y = \mathbf{p}\, X$$

Non è possibile utilizzare i risultati già ottenuti ponendo semplicemente $q_S = 0$ ma occorre ricavare nuovamente la stima p_S di **p** perché nel caso in cui la retta non sia forzata a passare per l'origine la pendenza potrebbe essere diversa.

In questo caso la quantità da minimizzare è $\boxed{U = \sum u_i^2 = \sum \left(\frac{Y_i - pX_i}{\sigma_i} \right)^2}$

$$\frac{\partial U}{\partial p} = \sum \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{Y_i - pX_i}{\sigma_i} \right)^2 = -2 \sum X_i \frac{Y_i - pX_i}{\sigma_i} = -2 \sum \frac{X_i Y_i}{\sigma_i^2} + 2p \sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2} .$$

Ponendo $\left. \frac{\partial U}{\partial p} \right|_{p_s} = 0$ si ottiene $\sum \frac{X_i Y_i}{\sigma_i^2} = p_s \sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2}$ da cui : $\boxed{p_s = \frac{\sum \frac{X_i Y_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2}}}$

In questo caso (nel caso di 2 o più parametri la verifica è meno banale) è facile verificare che p_s sia effettivamente un punto di minimo per U in quanto $\frac{\partial^2 U}{\partial p^2} > 0$.

Applicando la formula di propagazione delle incertezze in modo esatto è al solito possibile stimare la varianza della stima di **p** che risulta essere una combinazione lineare delle v.a. Y_i:

$$\sigma^2 (p_S) = \sum_{j=1,N} \left(\frac{\partial}{\partial Y_j} \frac{\sum \frac{X_i Y_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2}} \right)^2 \sigma_j^2 = \frac{\sum_{j=1,N} \left(\frac{X_j}{\sigma_j^2} \right)^2 \sigma_j^2}{\left(\sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2} \right)^2} = \frac{\sum_{j=1,N} \frac{X_j^2}{\sigma_j^2}}{\left(\sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2} \right)^2} = \boxed{\frac{1}{\sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2}}}$$

Anche in questo caso, qualora le varianze delle Y_i non siano note ma sia possibile ritenerle tutte uguali fra loro, col procedimento già visto si potrà ottenere la stima del parametro **p**:

ponendo $\sigma_i^2 = \sigma^2$ nelle espressioni precedenti si ottengono $\boxed{p_S = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2} \text{ e } \sigma^2(p_S) = \frac{\sigma^2}{\sum X_i^2}}$.

Infine dai dati a disposizione stimiamo la varianza delle Y_i che abbiamo supposto essere indipendente da Y_i e pari a $\sigma^2 = \frac{\sum (Y_i - p_S X_i)^2}{N-1}$

(al denominatore compare N-1 perché questa volta c'è una sola relazione[41] che lega fra loro le v.a. Y_i).

[40] consideratelo poco più di un esercizio riassuntivo e svolgetelo per verificare se avete afferrato il metodo

[41] in “STATISTICA” si accenna al perché la stima più corretta richieda N-1

- Un caso notevole: la **MEDIA PESATA**.

Può capitare che una grandezza fisica Y venga misurata più volte con metodi o strumenti diversi. In questo caso avremo a disposizione non solo le N misure Y_i ma anche le loro varianze σ_i^2.
Se le varianze sono diverse significa che le misure sono affette da errori casuali in entità diversa e quindi non è logico attribuire la stessa importanza a tutti i risultati Yi come si farebbe se venisse calcolata semplicemente la media aritmetica delle Yi: $\overline{Y} = \sum Y_i / N$.
Il metodo dei minimi quadrati permette di ricavare la formula di una media pesata in modo da attribuire maggior importanza alle misure meglio determinate.
In questo caso, sempre per usare la notazione precedente, la funzione da studiare è

$$\mathbf{Y = q}$$

Al solito consideriamo la funzione $\boxed{U = \sum u_i^2 = \sum\left(\frac{Y_i - q}{\sigma_i}\right)^2}$;

$$\frac{\partial U}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\sum\left(\frac{Y_i - q}{\sigma_i}\right)^2 = -2\sum\frac{Y_i - q}{\sigma_i^2};$$

ponendo $\frac{\partial U}{\partial q} = 0$ si ottiene
$$\boxed{q_S = \frac{\sum \frac{Y_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}} = \sum_i \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_j \frac{1}{\sigma_j^2}} Y_i}$$

La nostra migliore stima è dunque una media pesata dove i singoli pesi sono l'inverso delle varianze divisa per la somma degli inversi delle varianze.
Va notato che alla stima del valor vero contribuiscono maggiormente le misure con varianze più piccole cioè $\frac{1}{\sigma_i^2}$ più grande (si attribuisce un significato maggiore alle misure meglio determinate).

Calcoliamo la varianza della media pesata col solito metodo:

$$\sigma^2(q_S) = \sum_j \left(\frac{\partial q_S}{\partial Y_j}\right)^2 \sigma_j^2 = \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial Y_j}\frac{\sum \frac{Y_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}}\right)^2 \sigma_j^2 = \frac{\sum_j \left(\frac{1}{\sigma_j^2}\right)^2 \sigma_j^2}{\left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2}\right)^2} = \frac{\sum_j \frac{1}{\sigma_j^2}}{\left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2}\right)^2} = \boxed{\frac{1}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}}}.$$

Cioè la varianza della media pesata è data dall'inverso della somma degli inversi delle singole varianze (e quindi è inferiore alla più piccola di esse).

Occorre **prestare attenzione** al valore delle misure prima di utilizzare la media pesata: la teoria si basa sul fatto che le diverse misure si riferiscono alla stessa grandezza fisica e che quindi non siano presenti effetti sistematici importanti. Se le misure distano fra loro più di quanto è consentito dall'entità degli errori casuali stimati con le varianze significa o che sono presenti errori sistematici non trascurabili o che le varianze misurate non valutano correttamente l'entità degli errori casuali. In entrambi i casi è preferibile dimenticare l'esistenza delle varianze ed usare la normale media aritmetica e la sua incertezza.

APPENDICE

CALCOLO COMBINATORIALE

Per ricavare il valore della probabilità seguendo la definizione classica è sufficiente contare i casi favorevoli e quelli possibili. Quando il numero di eventi è elevato può essere utile utilizzare alcuni elementi di calcolo combinatoriale di cui qui si riporta qualche cenno:

Permutazioni:

N elementi possono essere collocati in N posizioni in $\boxed{N!}$ modi diversi.

Esempio: le 3 lettere A,B,C possono permutare in 3!=3x2x1=6 modi diversi:

ABC ACB BAC BCA CAB CBA

In generale: il primo elemento può essere collocato in N posizioni; per ognuna di queste N, il secondo elemento può essere collocato in N-1 posizioni; quindi complessivamente il primo e secondo elemento hanno Nx(N-1) modi diversi di collocarsi e così via.
In totale quindi Nx(N-1)x(N-2)x ... x(N-[N-2])x(N-[N-1]) = N!

Quando N è elevato, il calcolo di N! può essere efficientemente sostituito dall'applicazione della formula approssimata di **Stirling**:

$N! \approx \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N$ che già per N≥10 differisce da N! per meno dell'1%.

Disposizioni:

N elementi possono essere collocati in K posizioni in $\boxed{\frac{N!}{(N-K)!}}$ modi diversi.

Esempio: le N=4 lettere A,B,C,D possono essere collocate in K=2 posizioni in

$\frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4x3x2x1}{2x1}$=12 modi diversi:

AB AC AD BA BC BD CA CB CD DA DB DC

In generale: se le posizioni fossero N gli N elementi permuterebbero in N! modi diversi. Ordiniamo queste N! permutazioni in modo tale che le prime K posizioni siano occupate dagli stessi elementi.
Poiché le posizioni sono solo K e le rimanenti N-K non sono utilizzabili, per ogni disposizione diversa dei primi K elementi i rimanenti N-K potrebbero permutare; quella particolare disposizione è quindi presente (N-K)! volte. Le disposizioni diverse nelle prime K posizioni sono quindi $\frac{N!}{(N-K)!}$.

Lo stesso risultato si otterrebbe anche nel caso delle disposizioni di K elementi in N posizioni (indichiamo con x una posizione occupata da un elemento diverso dai K considerati):

ABxx AxBx AxxB xABx xAxB xxAB
BAxx BxAx BxxA xBAx xBxA xxBA

Combinazioni:
se non interessa l'ordine con cui N elementi possono essere collocati in K posizioni allora le disposizioni si riducono a $\boxed{\frac{N!}{K!(N-K)!}}$ combinazioni.

Esempio: le N=4 lettere A,B,C,D possono essere collocate in K=2 posizioni, a prescindere dall'ordine, in $\frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4x3x2x1}{(2x1)x(2x1)} = 6$ modi diversi:

AB AC AD BC BD CD

In generale: consideriamo le $\frac{N!}{(N-K)!}$ disposizioni di N elementi in K posizioni diverse; poiché non interessa l'ordine in cui si presentano i K elementi nelle K posizioni (K! permutazioni), le combinazioni diverse sono pari al numero delle disposizioni diviso K!

Lo stesso risultato si otterrebbe nel caso delle combinazioni di K elementi in N posizioni:

ABxx AxBx AxxB xABx xAxB xxAB

La quantità $\frac{N!}{K!(N-K)!}$ viene rappresentata dal simbolo $\binom{N}{K}$ che si legge "N su K".
Essa è detta coefficiente di Newton o binomiale perché è utilizzata nella formula di espansione della potenza di un binomio:

$$\boxed{(a+b)^N = \sum_{k=0,N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k}}$$

Come esempio di applicazione del calcolo combinatorio consideriamo la probabilità di vincere una cinquina giocando al lotto su una particolare ruota.
Abbiamo un solo caso favorevole e dobbiamo calcolare i casi possibili. Si tratta quindi di contare quante cinquine diverse, a prescindere dall'ordine, si possono avere con 90 elementi.
Tali combinazioni sono:

$$\frac{90!}{5!x(90-5)!} = \frac{90x89x88x87x86x85!}{5!x85!} = \frac{90x89x88x87x86}{5x4x2x3x1} = 43\,949\,268$$

e quindi la probabilità è circa $2{,}3x10^{-8}$.

CALCOLI PARTICOLARI

- $I_0(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a z^2}\, dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ infatti, detto $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2} dx$ e $J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a y^2} dy$ è $I = J$ e quindi

  $I^2 = I\,J = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx\, dy$. Passando da coordinate cartesiane a coordinate polari

  $I^2 = I\,J = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-a r^2} r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{a}\int_0^{\infty} e^{-a r^2} d(ar^2) = \frac{\pi}{a}$. Perciò $I_0(a) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

- $I_2(a) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-a z^2}\, dz = -\frac{dI_0(a)}{da} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$

Da questi due risultati, ponendo a = ½, si ottengono i valori di due integrali utili nei calcoli con le gaussiane: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$ e $\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$.

TABELLE

GAUSS: $\mathbf{f(z)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$

	0,00	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	**0,3989**	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	**0,2420**	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	**0,0540**	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	**0,0044**	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006

La probabilità che X (gaussiano) sia compreso fra **a** e **b** è: $P(\mathbf{a} \le X \le \mathbf{b}) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$.

Questo integrale non è risolvibile analiticamente; esistono però tabelle che riportano il calcolo eseguito numericamente; occorrerebbero tabelle con quattro parametri: **a**, **b**, **m**, $\boldsymbol{\sigma}$. Per semplificare tali tabelle si ricorre all'uso della variabile ridotta $z = \frac{x-m}{\sigma}$ per cui:

$P(\mathbf{a} \le X \le \mathbf{b}) = P(z_a \le z \le z_b)$ con $z_a = \frac{a-m}{\sigma}$ e $z_b = \frac{b-m}{\sigma}$. Quindi è sufficiente l'uso della seguente tabella (funzione della sola variabile ridotta z) che riporta il risultato dell'integrale $\int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z'^2}{2}} dz'$ che è detto funzione d'errore (*ERror Function*):

$$\mathbf{ERF(z)} = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z'^2}{2}} dz'$$

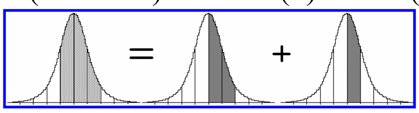
	0,00	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0949	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1369	0,1406	0,1443	0,1481	0,1518
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1701	0,1737	0,1773	0,1808	0,1844	0,1880
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2020	0,2054	0,2089	0,2123	0,2157	0,2191	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2643	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2853
0,8	0,2881	0,2911	0,2939	0,2968	0,2996	0,3024	0,3051	0,3079	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3290	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	**0,3413**	0,3438	0,3462	0,3485	0,3509	0,3532	0,3555	0,3577	0,3600	0,3622
1,1	0,3644	0,3665	0,3687	0,3708	0,3729	0,3750	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3850	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3998	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4083	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4178
1,4	0,4193	0,4208	0,4222	0,4237	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4358	0,4370	0,4382	0,4395	0,4406	0,4418	0,4430	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4485	0,4495	0,4506	0,4516	0,4526	0,4535	0,4545
1,7	0,4555	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4600	0,4608	0,4617	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4679	0,4686	0,4693	0,4700	0,4706
1,9	0,4713	0,4720	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4762	0,4767
2,0	**0,4773**	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4813	0,4817
2,1	0,4822	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4858
2,2	0,4861	0,4865	0,4868	0,4872	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4899	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4914	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4923	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4933	0,4935	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4942	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4954	0,4955	0,4956	0,4958	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4965
2,7	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4975	0,4975	0,4976	0,4977	0,4978	0,4978	0,4979	0,4980	0,4980	0,4981
2,9	0,4982	0,4982	0,4983	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	**0,4987**	0,4987	0,4988	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990	0,4990
3,1	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999

Supponiamo di voler calcolare $P(9{,}9\ g \le M \le 10{,}2\ g)$ sapendo che la massa M (distribuita gaussianamente) ha un valor medio $m = 10{,}00$ g e $\sigma = 0{,}10$ g.

Calcoliamo: $z_a = \dfrac{a - m}{\sigma} = \dfrac{9{,}9 - 10{,}0}{0{,}1} = -1$ e $z_b = \dfrac{b - m}{\sigma} = \dfrac{10{,}2 - 10{,}0}{0{,}1} = 2.$

$P(9{,}9\ g \le M \le 10{,}2\ g) = P(-1 \le z \le 2) = P(-1 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 2) =$

$=$ [42] $P(0 \le z \le 1) + P(0 \le z \le 2) =$ ERF(1) + ERF(2) = 0,3413 + 0,4773 = 82,9 %

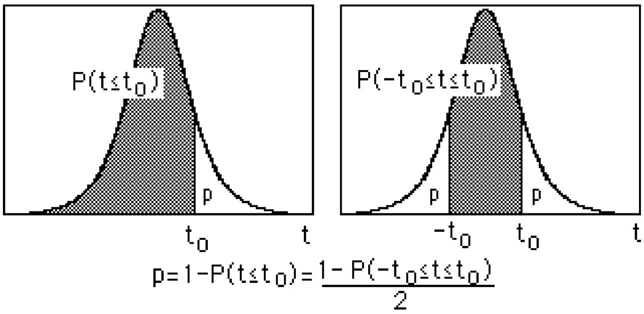


[42] $P(-1 \le z \le 0) = P(0 \le z \le 1)$ per la simmetria della gaussiana

DISTRIBUZIONE DI STUDENT

Valori t_0 della funzione cumulativa $F(t_0) = P(t \leq t_0)$ per vari gradi di libertà ν

$\nu \backslash F(t_0)$	**0,60**	**0,70**	**0,75**	**0,80**	**0,90**	**0,95**	**0,975**	
1	0,325	0,727	1,000	1,376	3,08	6,31	12,71	
2	0,289	0,617	0,816	1,061	1,89	2,92	4,30	
3	0,277	0,584	0,765	0,978	1,64	2,35	3,18	
4	0,271	0,569	0,741	0,941	1,53	2,13	2,78	
5	0,267	0,559	0,727	0,920	1,48	2,02	2,57	
6	0,265	0,553	0,718	0,906	1,44	1,94	2,45	
8	0,262	0,546	0,706	0,889	1,40	1,86	2,31	
10	0,260	0,542	0,700	0,879	1,37	1,81	2,23	
15	0,258	0,536	0,691	0,866	1,34	1,75	2,13	
20	0,257	0,533	0,687	0,860	1,32	1,72	2,09	
40	0,255	0,529	0,681	0,851	1,30	1,68	2,02	
120	0,254	0,526	0,677	0,845	1,29	1,66	1,98	
∞	0,253	0,524	0,674	0,842	1,28	1,645	1,96	← gaussiana



ESEMPIO

Avendo eseguito due sole misure della grandezza X si ottengono i valori x_1 e x_2.
Da questi due valori si ottiene per l'intervallo di confidenza

$$\overline{X} \pm \sigma_S(\overline{X}) =^{[43]} \frac{x_1 + x_2}{2} \pm \frac{|x_1 - x_2|}{2}$$

un livello di confidenza del 50% (ipotizzando che X segua una distribuzione gaussiana).
Infatti per $\nu = N-1 = 1$ in corrispondenza di $t_0 = 1$ la tabella indica per la funzione cumulativa 0,75 e quindi $P(-1 \leq t \leq 1) = 2 \times (1 - 0,75) = 0,50$.

[43] verificare per esercizio l'espressione della deviazione standard sperimentale della media aritmetica nel caso di sue sole misure

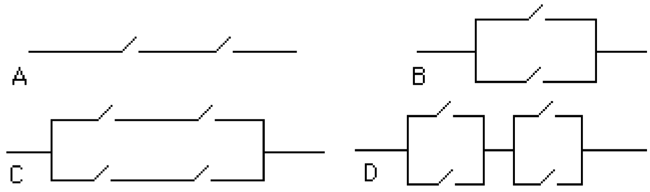
DISTRIBUZIONE DEL χ^2

Valori t_0 della funzione cumulativa $F(t_0) = P(t \leq t_0)$ per vari gradi di libertà ν

$\nu \backslash F(t_0)$	**0,025**	**0,05**	**0,10**	**0,25**	**0,50**	**0,75**	**0,90**	**0,95**	**0,975**
1	0,0010	0,0039	0,0158	0,102	0,455	1,32	2,71	3,84	5,02
2	0,0506	0,103	0,211	0,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38
3	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35
4	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1
5	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8
6	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4
8	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5
10	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5
15	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5
20	9,59	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2
50	32,4	34,8	37,7	42,9	49,3	56,3	63,2	67,5	71,4
100	74,2	77,9	82,4	90,1	99,3	109	118	124	130

ESERCIZI

1) Gli interruttori in questi circuiti hanno ognuno la probabilità del 20% di essere aperti; calcolare la probabilità che in ciascun schema possa circolare corrente:



2) Perché la funzione f(x) = x + c con -1 g ≤ x ≤ 5 g non può essere considerata una densità di probabilità? [la domanda non riguarda il calcolo delle probabilità …]

3) Verificare se le seguenti funzioni possono essere delle distribuzioni di probabilità e, nel caso, calcolare media e varianza:

A X^2 $(0 \le x \le 1\ \Omega)$ B X $(-1 \le x \le 1\ \mathrm{mA})$ $\frac{C}{X}(1 \le x \le 2\,\mathrm{m})$

$\frac{D}{X^2}(2 \le x \le 4\,\mathrm{kg})$ $\frac{E}{X}(-2 \le x \le -1\,\mathrm{cm})$ $\frac{F}{X}(-1 \le x \le 2\,\mathrm{cm})$

G X^2 X={1,2,3,4,5} H X X={0,2,3} g $\frac{I}{X^2}$ X={-1, 1, 2}

4) La vita di un componente è uniformemente distribuita fra 2 000 e 10 000 ore.
Qual è la probabilità che un componente viva più di 5 000 ore?

5) Dimostrare che $\sum_{i=1,N}(X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1,N} X_i^{\,2} - N\overline{X}^2$

6) Dalle densità di probabilità della corrente I: f(I) = K_I I (1mA - I) [0 ≤ I ≤ 1mA] e della resistenza R: f(R) = K_r R [0 ≤ R ≤ 1 kΩ] con I e R statisticamente indipendenti ricavare f(V) ed E(V) sapendo che le variabili sono legate dalla legge di Ohm: V=R I.

7) Vengono prodotte delle sbarre cilindriche di lunghezza uniformemente variabile fra 98 cm e 102 cm e di sezione distribuita uniformemente fra 29 cm^2 e 31 cm^2. Il volume medio delle sbarre è di 3,000 dm^3.
Lunghezza e sezione sono statisticamente indipendenti? Perché?

8) Una macchina per la realizzazione di circuiti integrati è garantita per avere un tasso di scarti del 2,0% (evento raro). In una produzione di 5000 componenti 150 non funzionano. Si può affermare che la macchina funziona correttamente ? (quanto valgono media e varianza del numero di componenti guasti?)

9) Vengono effettuati 80 lanci di 6 dadi a sei facce:
la faccia 5 esce X_i volte in N_i lanci:

X_i	0	1	2	3	4	5	6
N_i	30	27	18	4	1	0	0

Confrontare la media aritmetica dei risultati con quella attesa. ($\sum X_i$= 79; $\sum X_i^2$= 151)

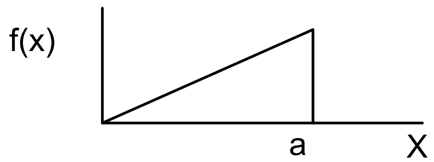
10) Calcolare le probabilità $P_{6,1/10}(3)$ (binomiale) e $P_{0,6}(4)$ (Poisson)

11) Calcolare E(K) e σ^2(K) per le distribuzioni $P_{2,3/4}(k)$ (binomiale) e $P_3(k)$ (Poisson)

12) Vengono lanciati 8 dadi tetraedrici. Alle 4 facce vengono associati i valori della v.a. discreta X={0, 1, 2, 3}.
Calcolare il valore atteso e la varianza della media aritmetica dei risultati di un lancio.

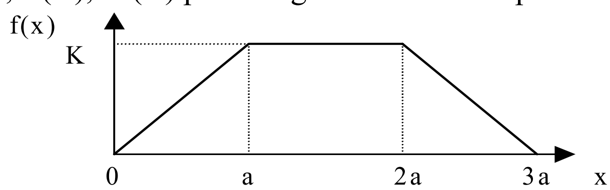
13) Da una serie di 50 misure si ottengono $\sum x_i = 250$ e $\sum x_i^2 = 1\,640$.
Stabilire se i risultati sono compatibili con quanto atteso (valore medio e varianza) da
a) distribuzione binomiale con N = 7 e p = 70 %
b) distribuzione di Poisson con m = 8
c) distribuzione uniforme (continua) fra 0,2 e 10,0.

14) La v.a. X ($0 \le x \le a$) ha una distribuzione triangolare:



Calcolare il livello di confidenza corrispondente a E(X) ± σ(X) e descrivere la funzione di distribuzione della media aritmetica ottenuta da campioni di 100 misure.

15) Determinare K, E(X), σ^2(X) per la seguente densità di probabilità:



16) All'uscita delle sei facce di un dado (contrassegnate con le lettere A, B, C, D, E e F) viene associata una variabile aleatoria X che assume il valore:
10 in corrispondenza di A, B e F
20 in corrispondenza di C e D
50 in corrispondenza di E.
Determinare il livello di confidenza di X relativo all'intervallo [m-σ;m+σ].

17) Da una serie di 200 misure di forza si ottiene $\overline{X}$ = -25,7 N e σ(X) = 20,4 N.
Qual è la probabilità che un'altra serie di 200 misure fornisca un risultato $\overline{X}' \ge -27{,}4$ N ?
Qual è la probabilità che un'altra misura singola fornisca $X \ge 0$ N ?

18) Se $\overline{T}$ =(100±10) K è stato ottenuto da un grosso campione di misure qual è la probabilità che il valore atteso di T sia > 110 K?

19) Viene estratto un campione di 100 misure di M da una distribuzione uniforme continua fra 10 g e 20 g. Fra quali valori è prevedibile che sia compresa la media aritmetica $\overline{M}$ ricavata dal campione?

20) La variabile aleatoria X ($0 \le x \le 30$) ha una distribuzione uniforme.
Scrivere la f($\overline{X}$) avendo eseguito 750 misure di X.

21) In una fabbrica di condensatori viene misura la capacità di 400 condensatori ottenendo $\overline{C}$ = 48,20 nF con una deviazione standard σ(C)= 1,20 nF.
Si può ritenere che $\overline{C}$ sia variato rispetto a una produzione precedente in cui $\overline{C}'$= 48 800 pF?

22) Da una serie di 100 misure di massa si ottengono le quantità:

$\Sigma m_i = 40$ kg e $\Sigma m^2_i = 16{,}009\,9$ kg^2.

Un'altra serie di misure fornisce m = 400,0 g con un'incertezza relativa dello 0,25 % ma questo risultato va aumentato, a causa di un effetto sistematico, di una quantità compresa fra 2 g e 8 g. Qual è il valore della massa?

23) Fra le lunghezze l e s intercorre la relazione $l = l_0 - s$. Si esegue una serie di 9 misure di l_i al variare di s_i ottenendo la quantità $\Sigma(l_i + s_i) = 90$ µm.
A) Si stimi col metodo dei minimi quadrati il valore di l_0 sapendo che l'incertezza relativa nella misura di l_i è trascurabile rispetto a quella di s_i e che la deviazione standard di s_i non varia con i ed è pari a 0,60 µm.
B) Si determinino la probabilità che sia $l_0 > 10{,}2$ µm e C) l'intervallo di confidenza corrispondente al livello di confidenza del 95% (si assuma gaussiana la distribuzione della stima di l_0)

24) Data la relazione **Y = 1 - a X**, scrivere le relazioni che permettono di stimare col metodo dei minimi quadrati **a** e la sua incertezza nell'ipotesi di una serie di N coppie di misure di X e Y in cui le determinazioni di X hanno incertezza trascurabile e quelle di Y varianze incognite ma uguali fra loro.

25) Ricavare l'espressione dell'incertezza da attribuire alla formula della media pesata.

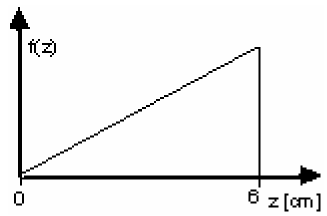
26) Mediante un galvanometro al tempo t = 0 viene bilanciato un ponte di Wheatstone; in tempi successivi si effettuano le seguenti misure (l'incertezza nelle misure di tempo è trascurabile):

tempo [min]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I [nA]	0,0	1,0	1,0	2,0	2,0	4,0	3,0	4,0	4,0	5,0

Utilizzare il metodo dei minimi quadrati (retta Y= p X con varianze incognite ma uguali) per determinare se l'andamento I(t) è dovuto a soli effetti casuali o il ponte si sta sbilanciando nel tempo (errore sistematico).
[se non ci fossero dipendenze temporali quanto varrebbe il coefficiente angolare della retta ?]

27) Si eseguono 6 misurazioni della differenza di potenziale V ai capi di una resistenza R e dell'intensità di corrente I che circola in essa al fine di determinare il valore di R. [V=R I]
Si ottengono le quantità: $\sum V_i^2 = 400{,}05\ V^2$; $\sum I_i^2 = 10^{-4}\ A^2$; $\sum V_i\, I_i = 0{,}2$ W.
A quale delle due resistenze R_1=(1990 ± 10) Ω o R_2 =(2050 ± 10) Ω si riferiscono le misure effettuate sapendo che l'amperometro utilizzato era molto più sensibile del voltmetro?
(utilizzare il metodo dei minimi quadrati con una retta passante per l'origine e supporre che le incertezze delle misure di V siano uguali fra loro e quelle di I trascurabili).

28) Scrivere l'espressione della funzione di distribuzione della media aritmetica ottenuta da campioni di 100 misure della variabile aleatoria Z che segue la distribuzione:



SOLUZIONI

1) P(A) = 0,8 x 0,8 = 64 %; P(B) = 1 – 0,2 x 0,2 = 96 %;
P(C) = 1 – (1-0,8x0,8)x(1-0,8x0,8) = 87,04 %; P(D) = 0,96 x 0,96 = 92,16 %

2) dimensionalmente [f(x)] = [c] = [x] mentre per una densità di probabilità $[f(x)] = [x]^{-1}$

3) $A = 3\ \Omega^{-3}$ $E(X) = 3/4\ \Omega$ $\sigma^2(X) = 3/80\ \Omega^2$
B la probabilità non può essere negativa per nessun valore della v.a.
C = 1/ln2 E(X) = 1/ln2 m $\sigma^2(X) = (3/2\ln 2-1/\ln^2 2)\ m^2$
D = 4 kg E(X) = 4ln2 kg $\sigma^2(X) = 8-16\ln^2 2\ kg^2$
E = -1/ln2 E(X) = -1/ln2 cm $\sigma^2(X) = (3/2\ln 2-1/\ln^2 2)\ cm^2$
F la probabilità non può essere negativa per nessun valore della v.a.
G = 1/55 E(X) = 45/11 $\sigma^2(X) = 644/605$
$H = 0,2\ g^{-1}$ E(X) = 2,6 g $\sigma^2(X) = 0,24\ g^2$
I = 4/9 E(X) = 2/9 $\sigma^2(X) = 104/81$

4) P(vita ≥ 5 000 ore) = $\frac{10000-5000}{10000-2000}$ = 62,5 %

6) $K_i = 6\ (mA)^{-3}$ E(I) = 0,5 mA $K_r = 2\ (k\Omega)^{-2}$ E(R) = 2/3 kΩ
Essendo I e R indipendenti si ha che f(R I) = f(R) f(I) e, analogamente, E(RI) = E(R) E(I) quindi: $f(V) = 12\ R\ I\ (1\ mA - I)\ V^{-1}$ e E(V) = 1/3 V.

7) Le grandezze L e S sono statisticamente indipendenti se e solo se E(LS) = E(L) E(S).
$E(L) = \frac{98+102}{2}$ = 100 cm; $E(S) = \frac{29+31}{2} = 30\ cm^2$; L e S sono statisticamente indipendenti perché $E(V) = 3,000\ dm^3$ è uguale a $E(L)\ E(S) = 3\ 000\ cm^3$.

8) $m = \sigma^2 = Np = 5000x0,02 = 100$ da cui σ = 10; ci si aspetta quindi un tasso di guasti pari a 100 ± 10 mentre la variabile t-Student vale t = (150-100)/10 = 5.
Anche se la distribuzione non è gaussiana è estremamente improbabile che | t | risulti casualmente >3 e quindi la differenza 150 – 100 è dovuta al cattivo funzionamento della macchina

9) Dalle frequenze dei risultati si calcolano la media aritmetica e la sua deviazione standard: N5 = (0,99 ± 0,11). Il risultato statistico ottenuto coincide con la previsione probabilistica: N p = 6 1/6 =1

10) Binomiale:1,458% Poisson: 0,296%

11) Binomiale: E(K) = N p = 3/2 $\sigma^2(K) = N\ p\ q = 3/8$
Poisson: E(K) = m = 3 $\sigma^2(K) = m = 3$

12) 1 dado: E(X) = 3/2 $\sigma^2(X) = 5/4$; 8 dadi: $E(\overline{X}) = 3/2$ $\sigma^2(\overline{X}) = 5/32$

13) c) infatti: $\overline{X} = 5,00 \pm 0,40$ $\sigma_s(X) = 2,8$ mentre:
binomiale E(X) = 4,9 σ(X) = 1,21

Poisson $E(X) = 8,0$ $\sigma(X) = 2,83$
uniforme $E(X) = 5,1$ $\sigma(X) = 2,83$

14) $f(x) = \frac{2\,x}{a^2}$; $E(X) = \frac{2}{3}a$; $\sigma(X)= \frac{a}{3\sqrt{2}}$; C.L. = $\frac{8}{9\sqrt{2}}$ = 62,9 %. Per il teorema del limite centrale ($100 \to \infty$) $f(\overline{X})$ è una gaussiana ($m = \frac{2}{3}a$; $\sigma = \frac{a}{30\sqrt{2}}$)

15) geometricamente: l'area vale aK/2 + aK + aK/2 = 2aK da cui K = 1/(2a); quindi
$0 \le x \le a$ $f(x) = \frac{x}{2a^2}$; $a \le x \le 2a$ $f(x) = \frac{1}{2a}$; $2a \le x \le 3a$ $f(x) = \frac{3}{2a} - \frac{x}{2a^2}$;
$E(X) = 1/6\ a + 3/4\ a + 7/12\ a = 3/2\ a$ $\sigma^2(X) = 5/12\ a^2$

16) All'intervallo di confidenza $20 \pm \sqrt{200}$ corrisponde un C.L. = 5/6

17) A) per il teorema del limite centrale ($200 \to \infty$) $f(\overline{X})$ è una gaussiana con m= -25,7 N e $\sigma = \frac{20{,}4\text{N}}{\sqrt{200}}$ = 1,44 N; quindi si ottiene: 0,5 + ERF(1,7/1,44) = 88,1 %
B) in questo caso $\sigma(X)$ = 20,4 N per cui: 0,5 - ERF(25,7/20,4) = 10,4 %

18) 16%

19) (15,00 ± 0,29) g

20) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ 0{,}32} e^{-\frac{(\overline{X}-15)^2}{2 \times 0{,}32^2}}$

21) È variata: t = 10 >> 3

22) Prima serie: $m = \frac{\Sigma m_i}{N} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{\Sigma m_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma m_i}{N}\right)^2\right)\frac{N}{N-1}}}{\sqrt{N}}$ =(400,0 ± 1,0) g.

Seconda serie: ipotizzando una distribuzione uniforme il valor medio della correzione additiva è $\frac{2+8}{2}$ = 5,0 g con una varianza $\frac{(8-2)^2}{12}$ = 3,0 g^2.
Pertanto da m = (400,0 ± 1,0) g si ottiene m' = (405,0 ± 2,0) g.
Poiché i valori delle due serie di misure distano solo 2,2 deviazioni standard è possibile utilizzare la media pesata per ottenere:

$$m = \frac{400\frac{1}{1} + 405\frac{1}{4}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{4}} \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1} + \frac{1}{4}}} = (401{,}00 \pm 0{,}89)\ \text{g}.$$

23) A) Poiché l'incertezza relativa nella misura di l_i è trascurabile rispetto a quella di s_i conviene invertire la relazione: $s = l_0 - l$ considerando l come variabile indipendente.
La quantità da minimizzare al variare di l_0 è $U = \sum_{i=1,9}\left(\frac{s_i - (l_0 - l_i)}{\sigma(s_i)}\right)^2$ da cui si ricava

$l_{O_S} = \dfrac{\sum s_i + \sum l_i}{N} = 10\ \mu m$ e $\sigma(l_{O_S}) = \dfrac{\sigma(s)}{\sqrt{N}} = 0{,}20\ \mu m$ da cui:

$l_O = (10{,}00 \pm 0{,}20)\ \mu m$ al 68,3% di C.L.(ipotesi gaussiana).

B) La probabilità che sia $l_O > 10{,}2\ \mu m$ ($z > 1$) è 16%;

C) il 95% di C.L. corrisponde a 1,96 deviazioni standard: $l_0 = (10{,}00 \pm 0{,}39)\ \mu m$

24) $a_S = \dfrac{\sum x_i y_i - \sum x_i}{\sum x_i^2}$ $\qquad \sigma^2(a_S) = \dfrac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$

26) Da $\Sigma X_i Y_i = 186$ nA min, $\Sigma X_i^2 = 385\ \text{min}^2$, $\Sigma Y_i^2 = 92\ (\text{nA})^2$ si ottengono le quantità:

$$p = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2} = 0{,}483\ \text{nA/min}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\left(Y_i - p\ X_i\right)^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\Sigma Y_i^2 - 2p\Sigma X_i Y_i + p^2 \Sigma X_i^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\Sigma Y_i^2 - \frac{(\Sigma X_i Y_i)^2}{\Sigma X_i^2}}{N-1}}\ 0{,}488\ \text{nA}$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma}{\sqrt{\Sigma X_i^2}} = 0{,}025\ \text{nA/min}$$

Poiché la pendenza $p = (0{,}483 \pm 0{,}025)$ nA/min è diversa da zero per circa 20 deviazioni standard l'andamento non costante di I(t) non è dovuto a soli effetti casuali.

27) Da $R = \dfrac{\sum V_i I_i}{\sum I_i^2} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{\sum I_i^2}}$ con $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum V_i^2 - \frac{(\Sigma V_i I_i)^2}{\Sigma I_i^2}}{N-1}}$ si ricava $R = (2000 \pm 10)\ \Omega$ che dista 3,5 deviazioni standard da R_2 e solo 0,71 da R_1.

28) $f(z) = z/18\ \text{cm}^{-1}$; $E(Z) = 4$ cm; $\sigma^2(Z) = 2\ \text{cm}^2$; $\sigma(\overline{Z}) = 0{,}14$ cm;

per il teorema del limite centrale ($100 \to \infty$) $f(\overline{Z})$ è una gaussiana: $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}0{,}14} e^{-\frac{(\bar{z}-4)^2}{0{,}04}}\ \text{cm}^{-1}$