

APPROSSIMAZIONE LINEARE

Lo studio di un qualsiasi sistema fisico richiede una prima fase di modellizzazione nella quale si cerca di schematizzare il fenomeno in studio in termini di semplici principi fondamentali. Dal modello della realtà quindi si può, utilizzando le leggi fisiche che lo descrivono, arrivare ad una rappresentazione matematica del fenomeno. L'evoluzione del sistema è quindi caratterizzata da una equazione (nel caso più generale da un sistema di equazioni), spesso differenziale, spesso di ordine non superiore al secondo, spesso a coefficienti costanti. Può quindi succedere che la stessa equazione differenziale sia utilizzata per studiare fenomeni molto diversi fra loro: elettronici, meccanici, economici, biologici, ecc.

Questa semplicità della natura è solo apparente: i fenomeni elementari sono descrivibili quantitativamente con formule semplici ma qualsiasi fenomeno che interessa il mondo applicativo dell'ingegneria è tutt'altro che elementare; è solo il fatto che spesso ci si limita alle approssimazioni lineari che semplifica la trattazione matematica.

Approssimazione lineare significa trascurare, negli sviluppi in serie di Taylor, tutti i termini superiori al primo; ricorrere allo sviluppo in serie di Taylor significa non conoscere esattamente la legge fisica che descrive il fenomeno.

Come esempio consideriamo la forza di attrito. Questa viene assunta costante per oggetti fermi, costante ma di valore inferiore per oggetti in movimento, proporzionale alla velocità per basse velocità, proporzionale al quadrato della velocità per velocità più elevate ... e quando il moto è così rapido da generare turbolenze?

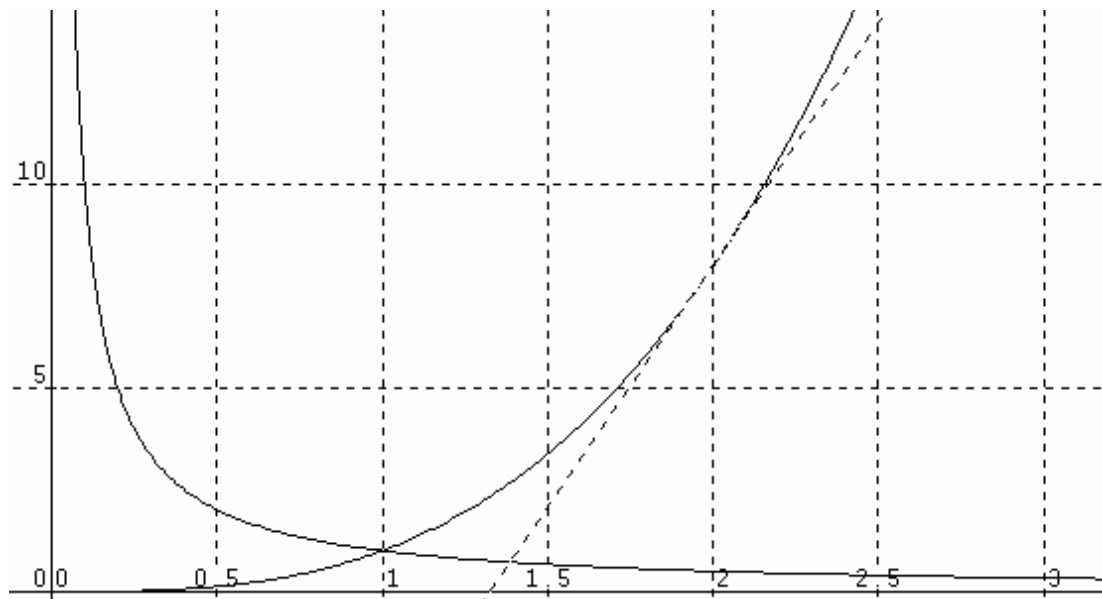
La dipendenza della forza d'attrito dalla velocità è tutt'altro che semplice e dipende anche da un'enormità di fattori (materiali, stato delle superfici di contatto, forma dei corpi, inclinazione, etc.) non sempre controllabili: in due parole non è nota.

Tuttavia, per gli scopi pratici è sufficiente trovare una relazione approssimata che ci consenta di prevedere l'entità del fenomeno in modo sufficientemente accurato per ciascuna particolare applicazione.

A questo punto in statica è sufficiente il coefficiente di attrito statico e a seconda dell'intervallo di velocità che interessa è possibile considerare uno, due o tre termini dello sviluppo in serie. A velocità più elevate conviene sfruttare altri approcci per ottenere approssimazioni sufficientemente accurate perché si entra nel campo dei fenomeni fortemente non lineari.

Ma se è sufficiente l'approssimazione lineare dove per piccoli angoli $\sin\vartheta = \vartheta$, per piccoli allungamenti $f = -k x$ e per movimenti lenti l'attrito è proporzionale alla velocità, ecco che molti fenomeni sono descrivibili mediante la stessa equazione, ad esempio le oscillazioni di un pendolo o in un circuito elettrico.

Come è però possibile considerare lineare l'andamento della funzione $y = x^3$?
Va considerato che spesso ciò che interessa non è conoscere una funzione in tutto il suo campo di definizione ma solo nell'intorno di un punto che rappresenta la particolarità del problema specifico.



In questo caso la tangente alla curva nell'intorno del punto (2,8) rappresenta per molti scopi una buona approssimazione (lineare visto che si tratta di una retta !) della funzione. Bisogna però fare attenzione, a volte, come nel caso di $y = 1/x$ in prossimità dell'origine, un'approssimazione lineare non è possibile (se non in un intorno talmente ristretto da non essere utile ai fini pratici).

Per esempio, **nel caso di misure è possibile un'approssimazione lineare se questa è ragionevole in un intervallo largo almeno quanto l'incertezza; altrimenti dovremo considerare anche gli altri termini dello sviluppo in serie.**

Una suddivisione generale dei vari fenomeni lineari riguarda l'ordine dell'equazione differenziale che descrive il fenomeno: tratteremo sistemi del primo ordine parlando dell'evoluzione temporale dell'indicazione di un termometro ma anche descrivendo la scarica di un condensatore; parleremo di sistemi lineari del secondo ordine trattando il moto dell'indice di un amperometro, ma anche accennando alla propagazione del calore lungo una sbarra, al funzionamento di un paracadute o considerando le oscillazioni forzate in circuito elettrico.

Per ognuna di queste categorie studieremo l'evoluzione della risposta al variare della sollecitazione. Studieremo tale evoluzione sia per variazioni brusche della sollecitazione, come avviene quando si inserisce uno strumento o si apre un interruttore, sia per variazioni sinusoidali della sollecitazione.

Lo studio in regime sinusoidale è molto generale: una qualsiasi funzione può essere sviluppata in una serie di funzioni sinusoidali se è periodica o in un integrale di funzioni sinusoidali se non è periodica. Questo sviluppo in armoniche dovuto a Fourier è molto potente e riduce lo studio di un sistema sollecitato con una qualsiasi funzione del tempo allo studio della sola sollecitazione sinusoidale:

- 1) si decompone la sollecitazione in armoniche di Fourier
- 2) si analizza la risposta del sistema a ciascuna armonica (si tratta di una funzione sinusoidale di ampiezza e pulsazione fissate)
- 3) si ricompone^[1] la risposta del sistema a partire dalle risposte parziali alle diverse armoniche

¹ l'operazione è semplice solo nel caso di funzioni lineari ... ma questo non costituisce un problema perché nel 90% delle applicazioni è sufficiente l'approssimazione lineare

EQUAZIONI DIFFERENZIALI A COEFFICIENTI COSTANTI

In fisica è assai ricorrente la necessità di risolvere l'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = d \quad (1)$$

Senza alcuna pretesa di rigore matematico viene riportata nel seguito la descrizione per una rapida ricerca della soluzione di tale equazione.

Per semplificare la trattazione introduciamo un operatore differenziale lineare^[2]

$$L[] = a \frac{d^2}{dx^2} + b \frac{d}{dx} + c$$

Con questa notazione la (1) può essere riscritta in modo compatto: $L[y] = d$

A - si consideri l'equazione differenziale omogenea associata all'equazione differenziale di partenza che si ottiene ponendo il termine noto d uguale a 0:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad \text{cioè } L[y] = 0 \quad (2)$$

B - se le funzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due soluzioni dell'equazione omogenea: $L[y_1] = 0$ e $L[y_2] = 0$

allora la combinazione lineare $y_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ è soluzione dell'equazione omogenea: infatti per la linearità dell'operatore si ha $L[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)] = c_1 L[y_1(x)] + c_2 L[y_2(x)] = 0$

Note due soluzioni dell'equazione omogenea, la soluzione più generale si ottiene da una loro combinazione lineare; i coefficienti della combinazione lineare verranno determinati dalle condizioni al contorno del problema.

C - La soluzione y più generale della (1) è data dalla soluzione y_0 dell'omogenea (2) più una soluzione particolare y_p che risolve l'equazione completa (1) (cioè $L[y_p] = d$)

Infatti ponendo $y = y_0 + y_p$ si ha, per la linearità dell'operatore e per la relazione $L[y_0] = 0$:

$$L[y] = L[y_0 + y_p] = L[y_0] + L[y_p] = L[y_p] = d$$

Nel caso di coefficienti costanti anche la soluzione particolare può essere costante. È quindi sufficiente determinare il valore costante che risolve $L[y_p] = d$ cioè $L[y_p] = c y_p = d$ da cui

$$y_p = \frac{d}{c} \quad \text{è la soluzione particolare costante della (1)}$$

La soluzione particolare costante determina il regime stazionario mentre la soluzione dell'omogenea caratterizza l'evoluzione del transiente tra l'istante iniziale e la soluzione stazionaria.

D - ipotizziamo come soluzione dell'equazione omogenea la funzione $y(x) = e^{\alpha x}$ e sostituiamola nell'omogenea: $a \frac{d^2(e^{\alpha x})}{dx^2} + b \frac{d(e^{\alpha x})}{dx} + ce^{\alpha x} = 0$ ottenendo $a \alpha^2 + b \alpha + c = 0$ che è l'equazione algebrica associata all'equazione differenziale omogenea (è detta anche equazione caratteristica).

Essa ha come incognita α i cui valori sono: $\alpha_{\pm} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

A seconda del segno del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, i valori di α possono essere reali e distinti, reali e coincidenti, complessi coniugati.

² questo è un operatore differenziale totalmente scalare: agisce su uno scalare come l'operatore gradiente e produce un risultato scalare come l'operatore divergenza

Quindi le due funzioni $y(x)$ soluzioni dell'equazione differenziale omogenea sono:

$$\begin{cases} \Delta > 0 & y_1(x) = e^{\left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)x} & y_2(x) = e^{\left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)x} \\ \Delta = 0 & y_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x} & y_2(x) = e^{-\frac{b}{2a}x} \\ \Delta < 0 & y_1(x) = e^{\left(-\frac{b}{2a} + j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)x} & y_2(x) = e^{\left(-\frac{b}{2a} - j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)x} \end{cases}$$

Pertanto, riconosciuto il segno del discriminante, si ottiene senza alcun altro calcolo:

1) se $\Delta > 0$ allora

$$y(x) = c_1 e^{\left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)x} + c_2 e^{\left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)x} + \frac{d}{c} \quad \leftarrow \Delta > 0$$

2) se $\Delta = 0$ si può dimostrare (è facile verificarlo) che in questo caso la soluzione più generale è:

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{-\frac{b}{2a}x} + \frac{d}{c} \quad \leftarrow \Delta = 0$$

3) se $\Delta < 0$

$$y(x) = A e^{-\frac{b}{2a}x} \cos(\omega x - \varphi) + \frac{d}{c} \quad \leftarrow \Delta < 0$$

Infatti in questo caso gli esponenti sono numeri complessi; ricorrendo alla relazione di Eulero: $e^{jX} = \cos(X) + j \sin(X)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{\left(-\frac{b}{2a} + j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)x} + c_2 e^{\left(-\frac{b}{2a} - j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)x} + \frac{d}{c} = \\ &= e^{-\frac{b}{2a}x} \left[c_1 \left(\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) + j \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) \right) + c_2 \left(\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) - j \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) \right) \right] + \frac{d}{c} = \\ &= e^{-\frac{b}{2a}x} \left[(c_1 + c_2) \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) + j(c_1 - c_2) \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) \right] + \frac{d}{c} \end{aligned}$$

Poiché nei casi che ci interessa studiare $y(x)$ è una quantità reale (non esistono grandezze fisiche non reali), tali devono essere anche i coefficienti $C_1 = c_1 + c_2$ e $C_2 = j(c_1 - c_2)$. Con questa posizione (C_1 e C_2 si determinano in base alle condizioni iniziali) la soluzione diventa:

$$y(x) = e^{-\frac{b}{2a}x} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) \right) + \frac{d}{c}$$

cioè una combinazione di seno e coseno moltiplicata per un esponenziale più un termine costante.

Si può riscrivere ora il termine fra parentesi: $C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) = A \cos(\omega x - \varphi)$.

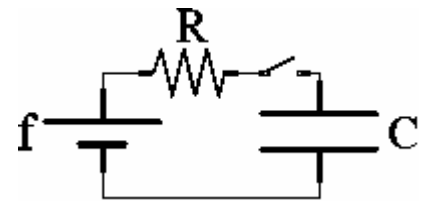
Infatti: $A \cos(\omega x - \varphi) = A \cos(\omega x) \cos(\varphi) + A \sin(\omega x) \sin(\varphi)$ e, poiché l'uguaglianza deve essere verificata per ogni valore di x occorre che separatamente siano uguali i coefficienti che moltiplicano il seno e il coseno, deve essere:

$$\begin{cases} C_1 = A \cos(\varphi) \\ C_2 = A \sin(\varphi) \end{cases} \begin{cases} A^2 = C_1^2 + C_2^2 \\ \text{tg}(\varphi) = \frac{C_2}{C_1} \end{cases} \text{ con la pulsazione data da: } \quad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Pertanto $y(x) = A e^{-\frac{b}{2a}x} \cos(\omega x - \varphi) + \frac{d}{c}$ con A e φ determinabili, come le altre costanti negli altri casi, a partire dalle condizioni al contorno del problema.

ESEMPI DI SISTEMI DESCRITTI DA EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

CIRCUITO RC



Consideriamo la carica del condensatore inserito nel circuito:

L'equazione della maglia fornisce, dopo la chiusura dell'interruttore, la relazione: $f = R i + V_C$ (la differenza di potenziale ai capi del generatore è pari alla somma della tensione ai capi di R e ai capi di C: ipotizzando una corrente circolante in senso orario^[3] si ottiene la relazione e l'armatura positiva del condensatore risulta dal lato della resistenza)

Consideriamo ora la relazione tensione-corrente del condensatore^[4]: $V_C = \frac{Q}{C} = \frac{\int i(t') dt'}{C}$ in cui si

è tenuto conto della definizione $i(t) = \frac{dq}{dt}$ e del fatto che la variazione di carica del condensatore è data dalla carica trasportata dalla corrente: $dQ = dq = i(t) dt$ (se invece il condensatore si scaricasse sarebbe $dQ = - dq$).

Derivando tale relazione si ottiene $\frac{dV_C}{dt} = \frac{i}{C}$ da cui: $i(t) = C \frac{dV_C}{dt}$.

Pertanto l'equazione di maglia può essere riscritta, a seconda della grandezza elettrica che si vuole studiare, nei seguenti modi:

- 1) $f = R i + \frac{\int i(t') dt'}{C}$ da cui derivando si ottiene $0 = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} \rightarrow R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$
- 2) $f = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \rightarrow R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = f$
- 3) $f = RC \frac{dV_C}{dt} + V_C \rightarrow RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = f$

In tutti e tre casi si ha un'equazione del primo ordine che può essere risolta anche col metodo descritto precedentemente:

- ricerca della/e soluzione/i dell'equazione algebrica associata all'omogenea
- costruzione della/e soluzioni dell'omogenea $e^{\alpha x}$
- scrittura della soluzione generale avendo sommato la soluzione particolare (d/c)

³ ovviamente ipotizzando che la corrente circoli nel verso opposto il risultato fisico non deve cambiare: verificate che le soluzioni risultino uguali a parte il segno della corrente

⁴ l'equazione della maglia considera solo tensioni; poi è necessario inserire una relazione tensione-corrente per ogni elemento della maglia. Per la resistenza si usa la legge di Ohm; per la capacità si usa la relazione tensione-carica; per l'induttanza la legge di Faraday.-Neuman-Lenz; per eventuali altri elementi non lineari andranno inserite le opportune relazioni tensione-corrente

- 1) $R \alpha + \frac{1}{C} = 0$ da cui $\alpha = -\frac{1}{RC}$ da cui $i(t) = i_0 e^{-t/RC}$ (d = 0)
- 2) $R \alpha + \frac{1}{C} = 0$ da cui $\alpha = -\frac{1}{RC}$ da cui $Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} + fC$ (d = f; c = $\frac{1}{C}$)
- 3) $RC \alpha + 1 = 0$ da cui $\alpha = -\frac{1}{RC}$ da cui $V_C(t) = V_0 e^{-t/RC} + f$ (d = f; c = 1)

- determinazione delle costanti a partire dalle condizioni al contorno

1) supponendo che il morsetto negativo del generatore sia a potenziale nullo (scegliamo così la costante additiva dei potenziali in questo problema), appena si chiude il circuito l'estremità di R dal lato generatore è a potenziale f mentre quella dal lato C è a potenziale nullo (se supponiamo il condensatore inizialmente scarico). Pertanto la corrente che scorre inizialmente nella resistenza (e quindi in tutta la maglia) vale $i(0) = f/R$

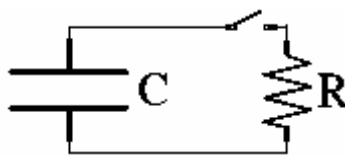
2) se supponiamo il condensatore inizialmente scarico $Q(0) = 0$

3) se supponiamo il condensatore inizialmente scarico $V_C(0) = 0$

Pertanto:

- 1) $i(0) = i_0 = f/R$ da cui $i(t) = f/R e^{-t/RC}$
- 2) $Q(0) = 0$ da cui $Q_0 = -fC$ e quindi: $Q(t) = fC(1 - e^{-t/RC})$
- 3) $V_C(0) = 0$ da cui $V_0 = -f$ e quindi: $V_C(t) = f(1 - e^{-t/RC})$

In modo analogo si ottengono le equazioni che regolano la scarica del condensatore su una resistenza:



L'equazione della maglia fornisce, dopo la chiusura dell'interruttore, la relazione: $V_C = R i$ (la differenza di potenziale ai capi del condensatore è pari alla tensione ai capi di R: ipotizzando una corrente circolante in senso orario^[5] si ottiene la relazione)

Consideriamo ora la relazione tensione-corrente del condensatore: $V_C = \frac{Q}{C} = \frac{Q(0) - \int i(t') dt'}{C}$ in

cui si è tenuto conto della definizione $i(t) = \frac{dq}{dt}$ e del fatto che la carica iniziale $Q(0)$ del condensatore varia a causa della carica trasportata dalla corrente: $dQ = -dq = -i(t) dt$

Derivando tale relazione si ottiene $\frac{dV_C}{dt} = -\frac{i}{C}$ da cui: $i(t) = -C \frac{dV_C}{dt}$.

⁵ ovviamente anche in questo caso ipotizzando che la corrente circoli nel verso opposto il risultato fisico non deve cambiare: verificate che le soluzioni risultino uguali a parte il segno della corrente

Pertanto l'equazione di maglia può essere riscritta, a seconda della grandezza elettrica che si vuole studiare, nei seguenti modi:

$$1) \quad \frac{Q(0) - \int i(t') dt'}{C} = R i \quad \text{da cui derivando si ottiene} \quad -\frac{i}{C} = R \frac{di}{dt} \rightarrow R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

$$2) \quad \frac{Q}{C} = -R \frac{dQ}{dt} \rightarrow R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

$$3) \quad V_C = -RC \frac{dV_C}{dt} \rightarrow RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = 0$$

In tutti e tre casi si ha un'equazione del primo ordine omogenea

$$1) \quad R \alpha + \frac{1}{C} = 0 \quad \text{da cui} \quad \alpha = -\frac{1}{RC} \quad \text{da cui} \quad i(t) = i_0 e^{-t/RC} \quad \text{dove} \quad i_0 = Q(0)/RC^{[6]}$$

$$2) \quad R \alpha + \frac{1}{C} = 0 \quad \text{da cui} \quad \alpha = -\frac{1}{RC} \quad \text{da cui} \quad Q(t) = Q(0) e^{-t/RC}$$

$$3) \quad RC \alpha + 1 = 0 \quad \text{da cui} \quad \alpha = -\frac{1}{RC} \quad \text{da cui} \quad V_C(t) = Q(0)/C e^{-t/RC}$$

TERMOMETRO

L'equazione che regola il passaggio di calore dall'esterno all'interno del termometro, e quindi caratterizza l'evoluzione della temperatura indicata dallo strumento dalla temperatura iniziale T_0 a quella finale T_f del sistema, è data da

$$1) \quad \frac{\delta Q}{dt} = -\frac{k S}{L} [T(t) - T_f] \quad \text{e} \quad 2) \quad \delta Q = C_T dT.$$

In 1) k è la conducibilità termica del vetro del bulbo, S è la superficie del bulbo a contatto col corpo a temperatura T_f e la quantità L è lo spessore del bulbo: la velocità con la quale il calore passa attraverso il vetro dipende dal materiale e , in prima approssimazione, cresce linearmente con la superficie di scambio, decresce con lo spessore dell'isolante e cresce linearmente con la differenza di temperatura fra le due facce del vetro.

In 2) C_T è la capacità termica del termometro ($Q = [T(t) - T_f] C_T$).

Sostituendo 2) in 1) si ottiene: $\frac{dT}{dt} = -\frac{k S}{L C_T} [T(t) - T_f]$ che, riscritta in termini della costante di

tempo del termometro $\tau = \frac{L C_T}{k S}$, diventa: $\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_f}{\tau}$.

Utilizzando il solito metodo si ottiene $\alpha + \frac{1}{\tau} = 0$ e quindi la soluzione dell'omogenea $T(t) = T_1 e^{-t/\tau}$.

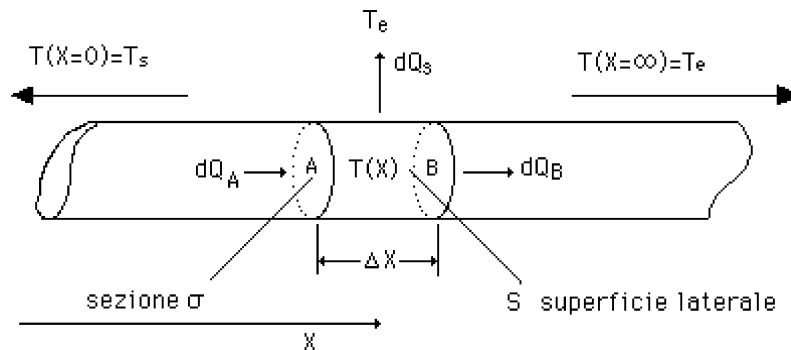
La soluzione completa è pertanto $T(t) = T_1 e^{-t/\tau} + T_f$.

Imponendo la condizione $T(0) = T_0$ si ottiene $T_1 = T_0 - T_f$ e quindi $T(t) = T_f - (T_f - T_0) e^{-\frac{t}{\tau}}$.

⁶ chiudendo il circuito la differenza di potenziale $Q(0)/C$ ai capi del condensatore carico viene applicata alla resistenza che viene quindi inizialmente percorsa dalla corrente $Q(0)/RC$

PROPAGAZIONE DEL CALORE LUNGO UNA SBARRA

Si consideri una sbarra di materiale omogeneo di lunghezza infinita immersa in un fluido termostato alla temperatura T_e posta (nell'origine dell'asse X) a contatto con una sorgente di calore alla temperatura T_s



Gli scambi di calore attraverso una sezione σ di spessore dx sono descritti approssimativamente da: $\frac{\delta Q}{dt} = -k \sigma \frac{dT}{dx}$ dove dT è la differenza infinitesima di temperatura fra le due facce della sezione; con lo stesso grado di approssimazione gli scambi di calore attraverso la superficie laterale sono descritti dalla relazione $\frac{\delta Q}{dt} = -h S [T_e - T(x,t)]$ dove h è il coefficiente di adduzione^[7].

Analizziamo un tratto di lunghezza Δx della sbarra, posta a distanza x dalla sorgente di calore (cioè $T(0,t) = T_s$), sufficientemente piccolo da poter essere considerato tutto alla temperatura $T(x)$.

Complessivamente gli scambi attraverso la superficie totale del tratto considerato sono regolati dalle relazioni $\frac{\delta Q_A}{dt} = -k \sigma_A \frac{dT_A}{dx}$; $\frac{\delta Q_B}{dt} = -k \sigma_B \frac{dT_B}{dx}$ e $\frac{\delta Q_s}{dt} = -h S [T_e - T(x)]$.

In condizioni stazionarie (equilibrio termico) $\delta Q_A = \delta Q_B + \delta Q_s$; quindi (essendo $\sigma_A = \sigma_B = \sigma$)

$$-k \sigma \frac{dT_A}{dx} = -k \sigma \frac{dT_B}{dx} - h [T_e - T(x)] \quad \text{da cui:} \quad k \sigma \left(\frac{dT_B}{dx} - \frac{dT_A}{dx} \right) = h S [T(x) - T_e].$$

Essendo $\sigma = \pi R^2$ e $S = 2 \pi R \Delta x$, si ottiene $\frac{\frac{dT_B}{dx} - \frac{dT_A}{dx}}{\Delta x} = \frac{2h}{Rk} [T(x) - T_e]$ e, passando agli

infinitesimi ($\Delta x \rightarrow dx$), si ricava: $\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{2h}{Rk} [T(x) - T_e]$.

Risolviamola col solito metodo: $\alpha^2 = \frac{2h}{Rk}$ da cui le due soluzioni: $\alpha_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{2h}{Rk}}$.

La soluzione sarà quindi data da $T(x) = T_1 e^{\sqrt{\frac{2h}{Rk}} x} + T_2 e^{-\sqrt{\frac{2h}{Rk}} x} + T_e$ con T_1 e T_2 da determinare in base alle condizioni iniziali: $T(0) = T_s$ e $T(x = \infty) = T_e$; la seconda condizione impone $T_1 = 0$, la prima $T_2 = T_s - T_e$.

Pertanto la relazione che esprime l'andamento spaziale della temperatura è, a regime:

$$T(x) = T_e + (T_s - T_e) e^{-\sqrt{\frac{2h}{Rk}} x}$$

⁷ il coefficiente di adduzione dipende dal materiale della sbarra, dallo stato di lavorazione della sua superficie e dal tipo di fluido (lo scambio di calore col fluido avviene non solo per conduzione ma anche per convezione e irraggiamento)

CADUTA DI UN GRAVE

Consideriamo la caduta di un corpo di massa m ipotizzando che la forza d'attrito esercitata dal fluido nel quale è immerso sia approssimabile con un termine di attrito viscoso proporzionale alla velocità. Detta $h(t)$ la profondità di caduta (cioè l'asse h è diretto verso il basso) e $v(t)$ la velocità, proiettando le forze lungo l'asse verticale si ha:

$$m \dot{h} = F = -\beta \dot{h} + mg \quad \rightarrow \quad m \ddot{h} + \beta \dot{h} = m g \quad (1)$$

L'equazione algebrica associata all'omogenea della (1) è $m \alpha^2 + \beta \alpha = 0$ da cui si ricavano le due soluzioni $\alpha = 0$ e $\alpha = -\beta/m$. Posto $\tau = m/\beta$ la soluzione dell'omogenea è $h(t) = h_1 + h_2 e^{-\frac{t}{\tau}}$.

L'equazione (1) ammette soluzione particolare costante non con $h(t)$ ma con $v(t) = \dot{h}(t)$.

Pertanto ponendo $\dot{h}(t) = v_p$ nella (1) si ottiene $\beta v_p = m g \rightarrow v_p = m/\beta g = g \tau$.

Da qui si ottiene $h_p(t) = v_p t = g \tau t$; la soluzione generale della (1) è quindi $h(t) = h_1 + h_2 e^{-\frac{t}{\tau}} + g \tau t$

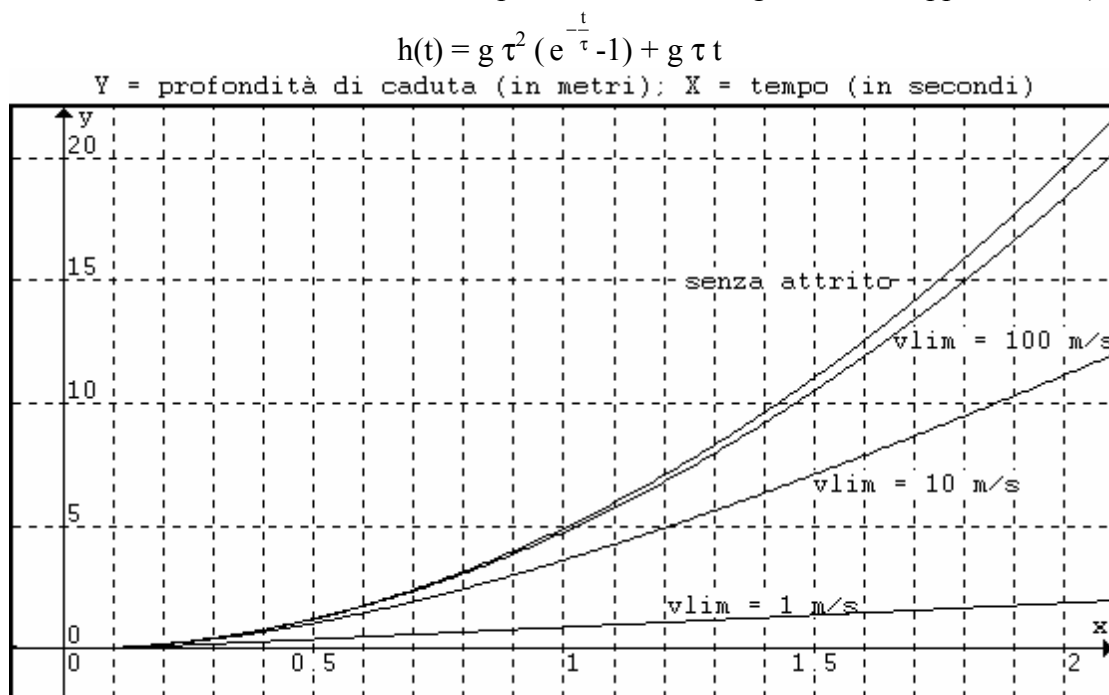
Derivando rispetto al tempo si ottiene $v(t) = \dot{h}(t) = -h_2/\tau e^{-\frac{t}{\tau}} + g \tau$

Infine dalla condizione iniziale $h(0) = 0$ si ottiene $0 = h_1 + h_2$ e dalla condizione $v(0) = \dot{h}(0) = 0$ si ricava $0 = -h_2/\tau + g \tau$ da cui $h_2 = g \tau^2$. Sostituendo si ottengono infine:

- $$h(t) = g \tau^2 (e^{-\frac{t}{\tau}} - 1) + g \tau t \quad v(t) = \dot{h}(t) = g \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad a(t) = \ddot{h}(t) = g e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Da queste relazioni si può notare come nel limite di t tendente a infinito (cioè dopo 3 - 5 costanti di tempo) l'accelerazione si annulla e la velocità tenda alla velocità limite $v_{lim} = g \tau$. Invece, considerando i primi termini dello sviluppo in serie dell'esponenziale, si ottengono^[8], per il limite di attrito nullo (cioè t/τ prossimo a zero) gli andamenti $h(t) = 1/2 g t^2$; $v(t) = g t$; $a(t) = g$.

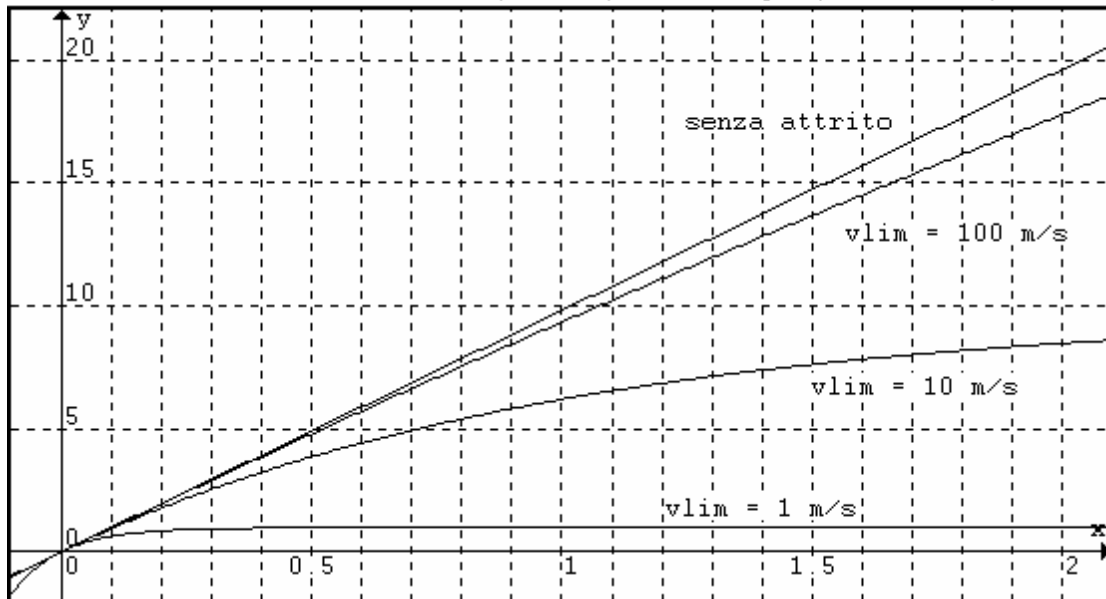
Grafichiamo profondità di caduta, velocità e accelerazione per vari valori di velocità limite: infinita (attrito nullo) e 100 m/s; 10 m/s; 1 m/s (valori che come ordine di grandezza corrispondono rispettivamente alla caduta di un sasso, di un paracadute, di un foglio di carta appallottolato).



⁸ sì, vi sto chiedendo esplicitamente di verificarlo; è importante saper utilizzare lo sviluppo in serie di Taylor

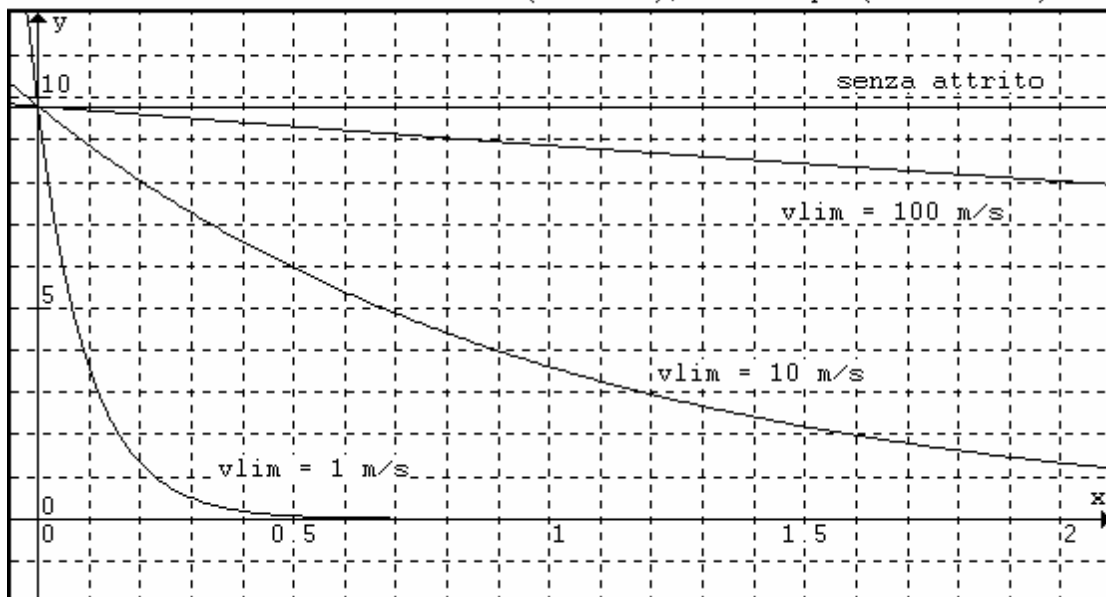
$$v(t) = \dot{h}(t) = g \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Y = velocità di caduta (in m/s); X = tempo (in secondi)



$$a(t) = \ddot{h}(t) = g e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Y = accelerazione di caduta (in m/s²); X = tempo (in secondi)



ALTRI SISTEMI DEL SECONDO ORDINE

Consideriamo come ulteriore esempio tre diversi sistemi fisici descrivibili in termini della stessa equazione differenziale:

1) un corpo di massa m è appeso verticalmente tramite una molla di costante elastica K immersa in un fluido viscoso che sviluppa una forza di attrito proporzionale, tramite il coefficiente b, alla velocità.

Proiettando le forze lungo l'asse X parallelo all'accelerazione di gravità: $m\ddot{x} = mg - Kx - b\dot{x}$

•• $m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = mg$

2) un corpo libero di ruotare intorno ad un asse con momento d'inerzia I è sottoposto all'azione di una coppia M ed è collegato ad una molla a spirale (che sviluppa un momento di richiamo proporzionale all'angolo di rotazione ϑ tramite il coefficiente c) immersa in un fluido che sviluppa un momento di attrito proporzionale, tramite il coefficiente β alla velocità angolare.

Proiettando i momenti sull'asse di rotazione: $I\ddot{\vartheta} = M - c\vartheta - \beta\dot{\vartheta}$

•• $I\ddot{\vartheta} + \beta\dot{\vartheta} + c\vartheta = M$

3) in un circuito sono posti in serie una resistenza R, una induttanza L e una capacità C.

Viene chiuso un interruttore che connette un generatore di forza elettromotrice f alla serie.

Considerando l'equazione della maglia $f - L\frac{di}{dt} = Ri + \frac{Q}{C}$, poiché anche in questo caso è

$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dQ}{dt}$, si ottiene: $f - L\ddot{Q} = R\dot{Q} + \frac{Q}{C}$

•• $L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = f$

L'evoluzione dei tre sistemi è quindi caratterizzata dalla stessa equazione:

$$a \frac{d^2y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = d$$

Come esempio dettagliato analizziamo il terzo caso e supponiamo che R sia variabile (potenziometro) in modo da poter variare il valore del discriminante.

Come scopo immaginiamo di voler misurare la differenza di potenziale V_C ai capi della capacità; essendo $V_C = Q(t)/C$ iniziamo dal calcolo di Q(t).

L'andamento di Q(t) si ottiene scrivendo l'equazione algebrica associata all'equazione differenziale

omogenea: $L\alpha^2 + R\alpha + \frac{1}{C} = 0$ da cui $\alpha_{\pm} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$

la soluzione è perciò: $Q(t) = c_1 e^{\alpha_+ t} + c_2 e^{\alpha_- t} + fC$.

Dallo studio del segno del discriminante potremo specificare l'andamento della funzione Q(t):

- Analizziamo una prima possibilità: $R^2 > \frac{4L}{C} \Rightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_c$ (resistenza critica) allora il discriminante è positivo e si hanno due soluzioni reali distinte:

$$Q(t) = c_1 e^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t} + c_2 e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t} + fC$$

cioè un termine costante più una combinazione di esponenziali decrescenti (caso sovrasmorzato). L'intensità di corrente sarà quindi:

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = -c_1 \left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right) e^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t} - c_2 \left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right) e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t}$$

Imponendo le condizioni iniziali: $Q(0)=0$ e $i(0)=0$ si ottiene:

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 + fC \\ 0 = -c_1 \left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right) - c_2 \left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right) \end{cases}$$

e con qualche passaggio algebrico:

$$c_1 = \frac{-fC}{2\sqrt{1 - \frac{R_c^2}{R^2}}} - \frac{fC}{2} \quad c_2 = \frac{fC}{2\sqrt{1 - \frac{R_c^2}{R^2}}} - \frac{fC}{2}$$

da cui: $V_C(t) = Q(t)/C = f \left[1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{R_c^2}{R^2}}} \right) e^{-\frac{R}{2L} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{R_c^2}{R^2}} \right) t} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{R_c^2}{R^2}}} \right) e^{-\frac{R}{2L} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{R_c^2}{R^2}} \right) t} \right]$

In queste condizioni (sovrasmorzamento) la tensione ai capi della capacità parte da un valore nullo e raggiunge asintoticamente il valore f.

- Analizziamo la seconda possibilità: $R = R_c$ (resistenza critica); il discriminante è nullo e si hanno due soluzioni reali coincidenti: $Q(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{R}{2L}t} + fC$.

$i(t)$ varrà quindi:
$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = c_2 e^{-\frac{R}{2L}t} - \frac{R}{2L} (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{R}{2L}t}$$

Imponendo le condizioni iniziali: $Q(0)=0$ e $i(0)=0$ si ha:

$$\begin{cases} 0 = c_1 + fC \\ 0 = c_2 - \frac{R}{2L} c_1 \end{cases} \text{ da cui si ottengono: } \begin{cases} c_1 = -fC \\ c_2 = -\frac{R}{2L} fC \end{cases}$$

e con qualche passaggio algebrico: $V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = f \left[1 - \left(1 + \frac{R}{2L} t \right) e^{-\frac{R}{2L}t} \right]$

In queste condizioni (smorzamento critico) la tensione ai capi della capacità parte da un valore nullo e raggiunge asintoticamente il valore f. Rispetto al caso sovrasmorzato la tensione si avvicina più rapidamente al valore asintotico.

- Analizziamo l'ultimo caso: $R < R_c$; il discriminante è negativo: esistono due soluzioni complesse coniugate da cui, ponendo $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ si ottiene:

$$Q(t) = A e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega t - \varphi) + fC \quad \text{e da questa: } i(t) = -A \frac{R}{2L} e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega t - \varphi) - A\omega e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega t - \varphi).$$

Imponendo le condizioni iniziali: $Q(0)=0$ e $i(0)=0$ si ottiene:

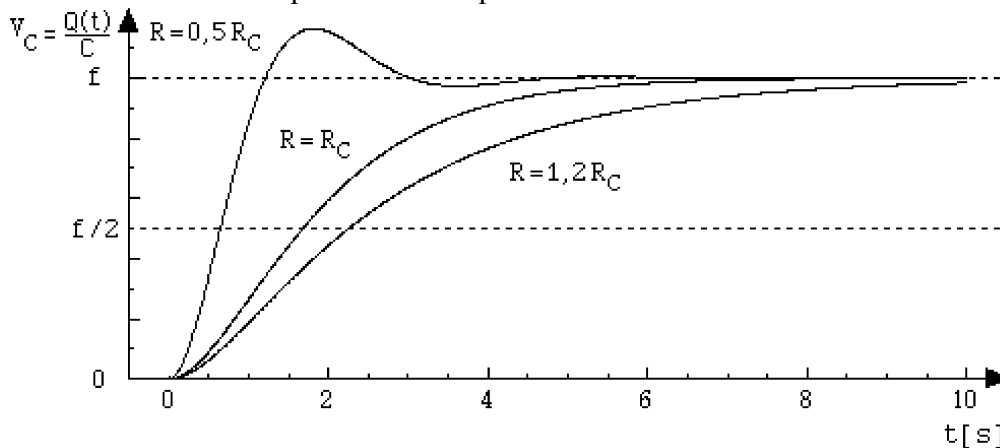
$$\begin{cases} 0 = A \cos(-\varphi) + fC = A \cos(\varphi) + fC \\ 0 = -A \frac{R}{2L} \cos(-\varphi) - A\omega \sin(-\varphi) = -A \frac{R}{2L} \cos(\varphi) + A\omega \sin(\varphi) \end{cases} \quad \text{da cui:}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{R}{2L\omega} = \frac{1}{\sqrt{\frac{R_C^2}{R^2} - 1}} \\ A = \frac{-fC}{\cos[\operatorname{atg}(\frac{R}{2L\omega})]} = -fC \sqrt{1 + \left(\frac{R}{2L\omega}\right)^2} = \frac{-fC}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{R_C^2}}} \end{cases}$$

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = f \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{R_C^2}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \cos\left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t - \operatorname{atg}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{R_C^2}{R^2} - 1}}\right)\right] \right\}$$

In queste condizioni (sottosmorzamento) la tensione ai capi della capacità parte da un valore nullo e raggiunge asintoticamente il valore f secondo una funzione coseno la cui ampiezza è modulata da un esponenziale decrescente.

•• Graficamente i tre casi si presentano in questo modo:



In condizioni di sovrasmorzamento la risposta è più "lenta" che nel caso critico mentre nel caso sottosmorzato il valore asintotico viene raggiunto prima ma oscillando intorno ad esso.

*** **Considerazioni finali**

- Se la resistenza R è nulla, cosa succede? Siamo in condizioni di sottosmorzamento e il fattore esponenziale che modula l'ampiezza dell'oscillazione è pari ad 1 ...
- Se nel circuito non ci fosse l'induttanza potremmo descrivere il comportamento del circuito con un'equazione differenziale del primo ordine (risulterebbe un'equazione a variabili separabili). Provate a risolverla passando attraverso la soluzione dell'equazione algebrica (di primo grado) associata all'equazione differenziale omogenea ... Troverete un risultato noto (carica di una capacità)
- Se nel circuito non ci fosse la capacità, procedendo analogamente al caso precedente, ritrovereste l'andamento della corrente in un circuito RL ...
- La soluzione del problema appena risolto è più generale di quanto sembri: poiché l'equazione differenziale ha la stessa forma per i tre esempi analizzati, il grafico precedente si riferisce anche alla posizione x del primo esempio (con valore asintotico $x(\infty) = mg/K$) e all'angolo ϑ del secondo (con valore asintotico $\vartheta(\infty) = M/c$). Ovviamente al variare delle condizioni iniziali si avranno valori iniziali e finali diversi ma l'andamento resterà lo stesso.

STUDIO DELLA RISPOSTA A UNA SOLLECITAZIONE VARIABILE NEL TEMPO

UN ESEMPIO PARTICOLARE: il termometro

Consideriamo nuovamente l'equazione che caratterizza la risposta di un termometro ad una sollecitazione T_f : $\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_f}{\tau}$ e supponiamo, diversamente dall'analisi precedente, che la temperatura T_f vari linearmente nel tempo: $T_f = T_0 + \gamma t$.

La soluzione dell'equazione omogenea è naturalmente la stessa: $T(t) = T_1 e^{-t/\tau}$.

Vediamo come ricavare una soluzione particolare; la più semplice è del tipo $T_2(t) = a + b t$.

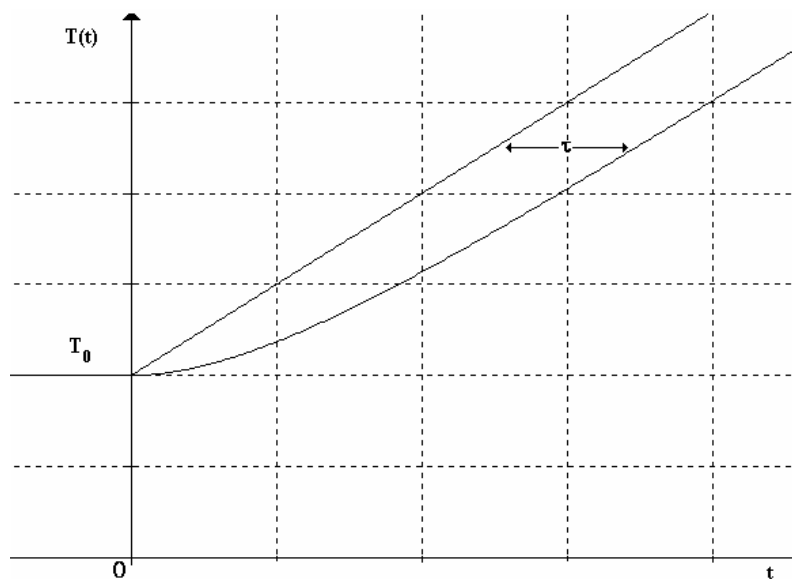
Sostituiamola nella $\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_0 + \gamma t}{\tau}$ ottenendo $b + \frac{a + b t}{\tau} = \frac{T_0 + \gamma t}{\tau}$ da cui si ricavano:

$b = \gamma$ e $a = T_0 - \gamma \tau$. Pertanto $T(t) = T_1 e^{-t/\tau} + T_0 - \gamma \tau + \gamma t = T_1 e^{-t/\tau} + T_0 + \gamma (t - \tau)$.

Supponendo come condizione iniziale che sia $T(0) = T_0$ (prima che la temperatura, partendo da T_0 , inizi ad aumentare, anche il termometro è alla temperatura T_0) si ricava:

$$T(t) = T_0 + \gamma (t - \tau) + \gamma \tau e^{-t/\tau}$$

Cioè il termometro non indica istante per istante il valore $T_f = T_0 + \gamma t$ ma, dopo alcune costanti di tempo necessarie per annullare il termine $\gamma \tau e^{-t/\tau}$, fornisce il valore corretto con un ritardo temporale pari a τ .



IN GENERALE

Lo studio della risposta di sistemi lineari a sollecitazione variabili richiede, come visto, la determinazione, caso per caso, degli integrali particolari delle equazioni differenziali. A volte, come nel caso analizzato, può essere utile e/o istruttivo ma molto più spesso la soluzione analitica non rende immediatamente l'idea del significato (e della possibile utilità) dell'andamento della risposta. Una metodologia più generale e decisamente più efficace consiste nell'operare una trasformazione delle variabili che caratterizzano il sistema in quantità, spesso complesse, in cui a volte scompare anche la dipendenza temporale per essere sostituita da altri tipi di dipendenza. L'esempio più classico è quello delle trasformate di Fourier in cui lo studio temporale viene sostituito da uno studio in frequenza.

SVILUPPI IN ARMONICHE DI FOURIER

Qualsiasi grandezza periodica può essere sviluppata in armoniche di Fourier, cioè può essere decomposta in una sommatoria (serie) di funzioni seno e coseno di frequenza uguale o multiplo intero della frequenza (armonica fondamentale) della grandezza analizzata.

Detto $T = 2\pi/\omega$ il periodo della funzione $f(t)$, cioè $f(t+T) = f(t)$, lo sviluppo in serie di Fourier consiste in $f(t) = \sum_{n=0, \infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$ dove:

$$\text{per } n > 0 \quad A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$\text{per } n = 0 \quad A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (\text{cioè il valore della funzione } f(t) \text{ mediato in un periodo})$$

$$\text{per ogni } n \quad B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt$$

Più in generale con Fourier si può decomporre anche una grandezza non periodica in funzioni armoniche (seni e coseni) purché la sommatoria diventi un integrale:

$$f(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos(\omega t) dt + b(\omega) \sin(\omega t) dt \quad [9]$$

Se il sistema in esame è lineare, la trasformazione di Fourier è assai utile. Supponiamo che la risposta $r(t)$ del sistema sia $r(t) = L[s(t)]$ dove $s(t)$ è la sollecitazione mentre $L[]$ è un generico operatore differenziale lineare che rappresenta la funzione di risposta del sistema (ad esempio, una delle equazioni differenziali che abbiamo già studiato).

Vediamo ora come, nel caso di un sistema lineare, sia sufficiente conoscere la sua risposta ad una qualsiasi sollecitazione sinusoidale:

- si scompone in armoniche la sollecitazione, ad esempio: $s(t) = \sum_{n=0, \infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$

- si determina la risposta del sistema ad ognuna di tali armoniche:

$$C_n(t) = L[\cos(n\omega t)] \quad \text{e} \quad S_n(t) = L[\sin(n\omega t)]$$

- si sintetizza la risposta con una antitrasformazione:

$$\begin{aligned} r(t) &= L[s(t)] = L\left[\sum_{n=0, \infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)\right] \stackrel{[10]}{=} \sum_{n=0, \infty} A_n L[\cos(n\omega t)] + B_n L[\sin(n\omega t)] = \\ &= \sum_{n=0, \infty} A_n C_n(t) + B_n S_n(t) \end{aligned}$$

9 in questo caso è più immediato riconoscere come i coefficienti dello sviluppo di Fourier siano funzione della pulsazione: come già accennato, quindi, lo studio nel dominio del tempo (la funzione $f(t)$ è funzione del tempo) si trasforma in quello nel dominio delle frequenze

10 sfruttando la linearità dell'operatore $L[]$

Come esempio di trasformazione di Fourier si consideri la funzione che descrive un'onda quadra di ampiezza K e periodo T (cioè $s(t) = K$ per $0 < t < T/2$ e $s(t) = 0$ per $T/2 < t < T$; analogamente nei periodi successivi). Lo sviluppo fornisce i seguenti valori per i coefficienti:

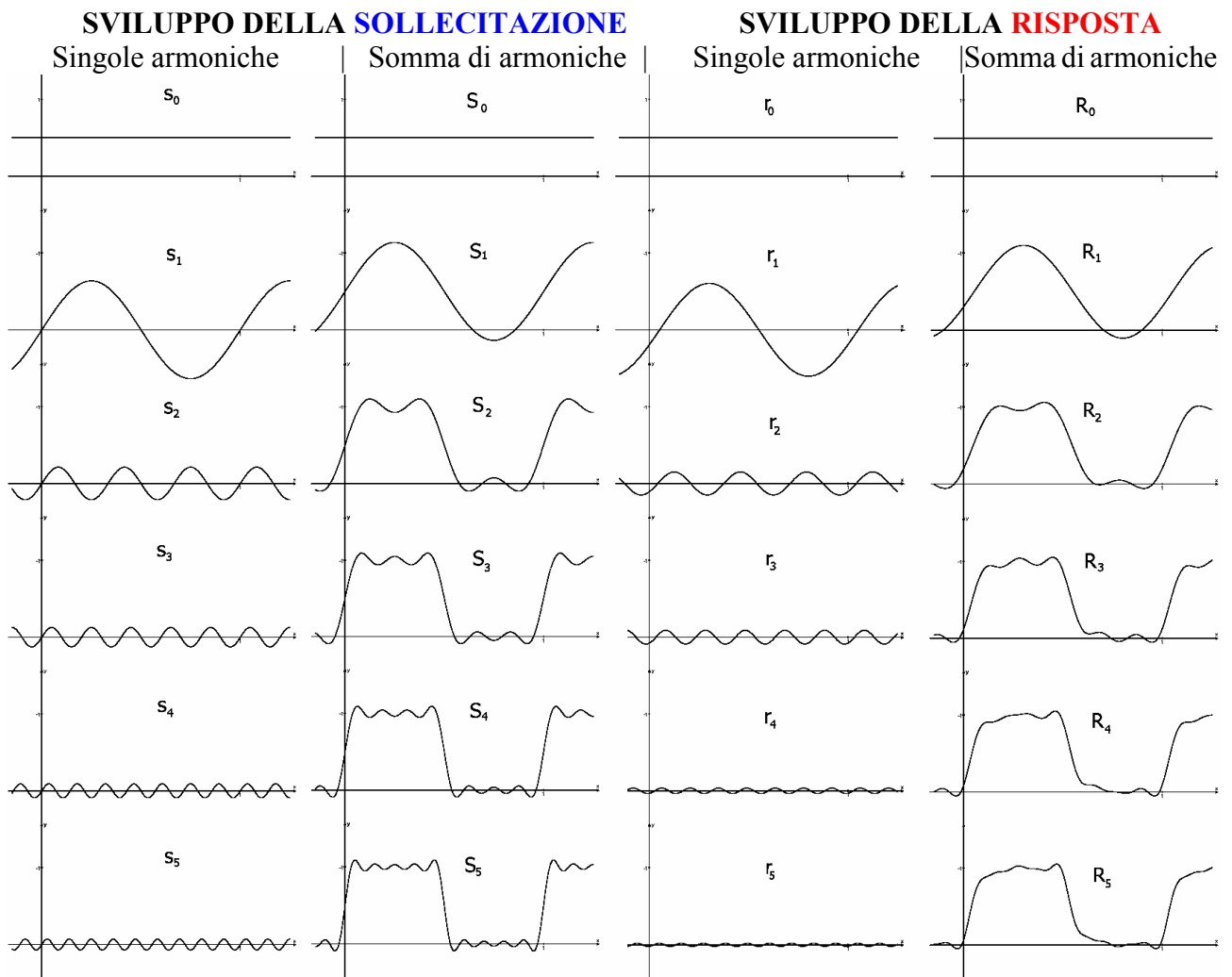
$$A_0 = \frac{K}{2} \quad A_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} K \cos(n\omega t) dt = 0 \quad B_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} K \sin(n\omega t) dt = \frac{K}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

(cioè $B_0 = 0$; $B_1 = \frac{2K}{\pi}$; $B_2 = 0$; $B_3 = \frac{2K}{3\pi}$; $B_4 = 0$; $B_5 = \frac{2K}{5\pi}$...)

Pertanto $s(t) = \frac{K}{2} + \frac{2K}{\pi} \sin(\omega t) + \frac{2K}{3\pi} \sin(3\omega t) + \frac{2K}{5\pi} \sin(5\omega t) + \dots$

Studiamo ora la risposta alla sollecitazione $s(t)$ di un sistema del primo ordine che sottoposto alla sollecitazione $s_n = S \cos(n\omega t)$ risponda $r_n = \frac{S}{\sqrt{1 + (\frac{n\omega}{\omega_0})^2}} \cos[n\omega t - \text{atang}(\frac{n\omega}{\omega_0})]$.

Come risponda il sistema alle singole armoniche dello sviluppo di $s(t)$ e quanto valga la somma di tali risposte è visualizzato in figura in cui si è ipotizzato $S=1$ e $\omega_0 = 3 \omega$: ($S_i = \sum_{n=0,i} s_n$; $R_i = \sum_{n=0,i} r_n$)



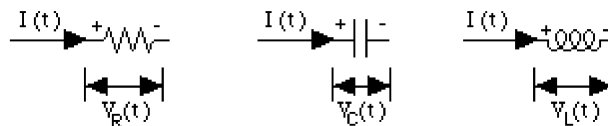
Il sistema studiato si comporta come un passa basso: solo le armoniche con frequenza inferiore a quella di taglio legata a ω_0 vengono trasmesse, praticamente senza distorsioni di ampiezza e fase, all'uscita del sistema; quelle a frequenza maggiore vengono invece fortemente attenuate. Come risultato la risposta mostra un andamento esponenziale.

IL METODO SIMBOLICO

Da quanto è stato visto a proposito dello sviluppo in armoniche di Fourier risulta evidente l'importanza dello studio delle risposte a sollecitazioni sinusoidali. La risoluzione di equazioni con funzioni seno e coseno non è tuttavia particolarmente efficiente né istruttiva. Svilupperemo pertanto una metodologia generale per la soluzione di tali equazioni che va sotto il nome di metodo simbolico. Svolgeremo quindi, nei prossimi due paragrafi, tale studio prima nell'ambito di circuiti elettrici costituiti da elementi resistivi, induttivi e capacitivi e poi, in generale, nell'ambito di sistemi meccanici per caratterizzare la risposta di uno strumento di misura.

IL METODO SIMBOLICO NELLO STUDIO DEI CIRCUITI ELETTRICI

Consideriamo la differenza di potenziale che si manifesta ai capi di una resistenza, un'induttanza e una capacità quando vengano attraversate da una corrente variabile $I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi_I)$:



$$\begin{cases} V_R(t) = RI(t) = RI_0 \cos(\omega t - \varphi_I) \\ V_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(t') dt' = \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t - \varphi_I) \\ V_L(t) = L \frac{dI(t)}{dt} = -I_0 \omega L \sin(\omega t - \varphi_I) \end{cases}$$

Anziché continuare l'analisi utilizzando queste relazioni che contengono funzioni trigonometriche è preferibile ricorrere al metodo simbolico.

Sfruttando la relazione di Eulero:

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$$

è facile osservare come la funzione coseno non sia altro che la parte reale di $e^{j\varphi}$ e la funzione seno, la parte immaginaria di $e^{j\varphi}$.

Il metodo simbolico consiste nell'associare^[11] alle grandezze che variano sinusoidalmente (cosinusoidalmente) una funzione esponenziale complessa e solo alla fine del calcolo considerare la parte immaginaria (reale) del risultato.

Per esempio supponiamo di voler studiare il comportamento dei componenti R, C e L quando siano percorsi dalla corrente:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi_I) \Rightarrow I_0 e^{j(\omega t - \varphi_I)}$$

L'espressione che in condizioni di regime assumerà la differenza di potenziale agli estremi degli elementi R, C e L sarà:

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t - \varphi_V) \Rightarrow V_0 e^{j(\omega t - \varphi_V)}$$

Si ottiene così:

¹¹ non è una uguaglianza, ma una corrispondenza fra quantità reali e quantità complesse

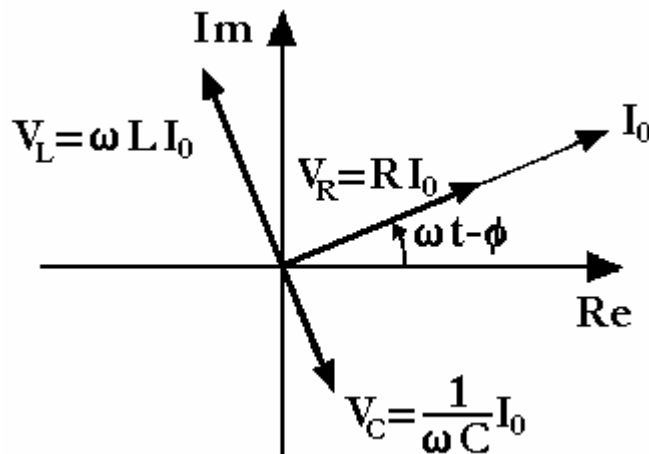
$$\begin{cases} V_R(t) \Rightarrow V_{0R} e^{j(\omega t - \varphi_R)} = R I_0 e^{j(\omega t - \varphi_I)} \\ V_C(t) \Rightarrow V_{0C} e^{j(\omega t - \varphi_C)} = \frac{1}{C} \int I_0 e^{j(\omega t' - \varphi_I)} dt' = \frac{1}{j\omega C} I_0 e^{j(\omega t - \varphi_I)} \\ V_L(t) \Rightarrow V_{0L} e^{j(\omega t - \varphi_L)} = L \frac{d(I_0 e^{j(\omega t - \varphi_I)})}{dt} = j\omega L I_0 e^{j(\omega t - \varphi_I)} \end{cases}$$

e dividendo per $e^{j\omega t}$ si ottengono:

$$\begin{cases} V_{0R} e^{-j\varphi_R} = R I_0 e^{-j\varphi_I} \Rightarrow \begin{cases} V_{0R} = R I_0 \\ \varphi_R = \varphi_I \end{cases} \\ V_{0C} e^{-j\varphi_C} = \frac{1}{j\omega C} I_0 e^{-j\varphi_I} \Rightarrow \begin{cases} V_{0C} = \frac{1}{\omega C} I_0 \\ \varphi_C = \varphi_I + \frac{\pi}{2}^* \end{cases} \\ V_{0L} e^{-j\varphi_L} = j\omega L I_0 e^{-j\varphi_I} \Rightarrow \begin{cases} V_{0L} = \omega L I_0 \\ \varphi_L = \varphi_I - \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

ossia, mentre la tensione ai capi di una resistenza è in fase con la corrente $\varphi_R = \varphi_I$ (p.es. quando la corrente è massima lo è anche la tensione), nel caso di una capacità o di una induttanza ciò non è vero ($\varphi = \varphi_I \pm \pi/2$) e c'è uno sfasamento di $\pi/2$ (in ritardo o anticipo).

Per visualizzare meglio tale comportamento conviene graficare tensioni e correnti nel piano complesso: se ad un certo istante la corrente forma un angolo $\varphi = \omega t - \phi$ con l'asse reale, anche la tensione ai capi di una resistenza R è a un angolo φ rispetto all'asse reale. La tensione ai capi di una induttanza L forma un angolo retto rispetto alla corrente che la attraversa; la tensione fra le armature di un condensatore di capacità C è invece in ritardo di $\pi/2$ rispetto alla corrente:



Essendo $\varphi = \omega t - \phi$, al passare del tempo l'angolo fra la corrente e l'asse reale cresce linearmente; cioè la corrente ruota con velocità angolare pari alla pulsazione ω trascinandosi le tensioni. Le quantità reali che ci interessa studiare (tensioni e correnti) altro non sono che le proiezioni sull'asse reale delle quantità complesse:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi_I) = \Re(I_0 e^{j(\omega t - \varphi_I)}) \quad e \quad V(t) = V_0 \cos(\omega t - \varphi_V) = \Re(V_0 e^{j(\omega t - \varphi_V)})$$

* $\frac{1}{j} e^{-j\varphi} = -j e^{-j\varphi} = e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j\varphi} = e^{-j(\varphi + \frac{\pi}{2})}$ $j e^{-j\varphi} = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\varphi} = e^{-j(\varphi - \frac{\pi}{2})}$

Spesso non è importante quale sia il valore istantaneo dell'angolo con l'asse reale: il comportamento di un circuito dipende piuttosto dalle relazioni fra le tensioni e le correnti. Per questo motivo conviene eliminare dalle grandezze complesse la dipendenza temporale ed operare su ciò che resta (fasori).

Riscriviamo le equazioni precedenti in altro modo definendo:

$$\begin{cases} V_{0R} e^{-j\varphi_R} = R I_0 e^{-j\varphi_I} \Rightarrow \bar{V}_R = R \bar{I} \\ V_{0C} e^{-j\varphi_C} = \frac{1}{j\omega C} I_0 e^{-j\varphi_I} \Rightarrow \bar{V}_C = \frac{1}{j\omega C} \bar{I} \\ V_{0L} e^{-j\varphi_L} = j\omega L I_0 e^{-j\varphi_I} \Rightarrow \bar{V}_L = j\omega L \bar{I} \end{cases}$$

Si noti che le relazioni tensione-corrente fra fasori non dipendono più dal tempo e che indipendentemente dal tipo di componente hanno la stessa forma: la tensione complessa è proporzionale alla corrente complessa. Tale costante di proporzionalità è detta **impedenza**:

$$\bar{V} = \bar{Z} \bar{I}$$

che nei casi precedenti assume i valori:

$$\begin{cases} \bar{Z}_R = R \\ \bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} \\ \bar{Z}_L = j\omega L \end{cases}$$

Si può notare che l'impedenza di una resistenza è reale mentre quella di una capacità o di una induttanza è immaginaria e il suo valore dipende dalla frequenza. In generale l'impedenza di un qualsiasi circuito avrà una componente reale e una immaginaria: $\bar{Z} = R + j X$; la parte reale è la resistenza, quella immaginaria è detta reattanza (di tipo induttivo se $X > 0$; capacitivo se $X < 0$).

La $\bar{V} = \bar{Z} \bar{I}$ è detta anche legge di Ohm generalizzata. Mediante essa le equazioni integro-differenziali necessarie per risolvere un circuito elettrico sollecitato sinusoidalmente diventano delle relazioni lineari fra fasori analoghe a quelle incontrate nello studio di circuiti in corrente continua!

Per esempio due impedenze poste in serie (attraversate dalla stessa corrente) sono equivalenti ad una unica impedenza di valore pari alla somma delle due; analogamente due impedenze in parallelo si comportano come una unica impedenza il cui inverso è pari alla somma degli inversi delle due impedenze (lo stesso comportamento delle resistenze nei circuiti in corrente continua).

La relazione $\bar{V} = \bar{Z} \bar{I}$ è l'equivalente di $V=RI$ e questo indipendentemente dalla natura resistiva, capacitiva o induttiva dell'impedenza.

Ottenuti i valori complessi dei fasori essi vanno ritrasformati nelle grandezze reali. Spesso è sufficiente calcolare il modulo del fasore che corrisponde all'ampiezza della grandezza: se per esempio si ottiene che in un circuito sollecitato a 50 Hz (314 rad/s) la tensione fra due punti

particolari vale $\bar{V} = 3 - 4j \Rightarrow \begin{cases} |\bar{V}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \\ \tan \varphi = \frac{-4}{3} \end{cases}$ allora: $V(t) = 5 \cos(314t + \arctan(\frac{-4}{3}))$.

In varie applicazioni è invece importante conoscere il rapporto fra una grandezza "d'uscita" di un circuito e una "d'ingresso": per esempio il rapporto fra la tensione di uscita applicata ad un apparecchio (utilizzatore, carico) e quella d'ingresso erogata da un generatore. Tale rapporto, detto **funzione di trasferimento** (a volte semplicemente amplificazione/attenuazione), è in generale una quantità complessa il cui modulo indica il rapporto fra le ampiezze della tensione di uscita e quella di ingresso e la cui fase indica la relazione di fase fra tali tensioni. Se è nota la funzione di trasferimento di un circuito per qualsiasi frequenza allora il suo comportamento è completamente determinato (sviluppo in armoniche di Fourier) per qualsiasi sollecitazione.

Negli esempi che seguono verrà data particolare enfasi alla funzione di trasferimento dei circuiti analizzati. Questo perché questa grandezza è frequentemente impiegata in molte applicazioni. Tuttavia la metodologia descritta può essere utilizzata anche per il calcolo di altre grandezze elettriche come ad esempio l'intensità di corrente che scorre in un particolare elemento o la tensione presente ai suoi capi (un ottimo esercizio che vi consiglio di svolgere è appunto il calcolo dell'intensità di corrente erogata dal generatore nei diversi esempi trattati). Sottolineo la particolare importanza che ha lo studio del comportamento dei circuiti nelle condizioni limite di frequenza nulla e infinita perché spesso ciò è sufficiente per una prima analisi degli stessi.

- Si analizzi il seguente circuito (**filtro passa basso** o taglia alto):

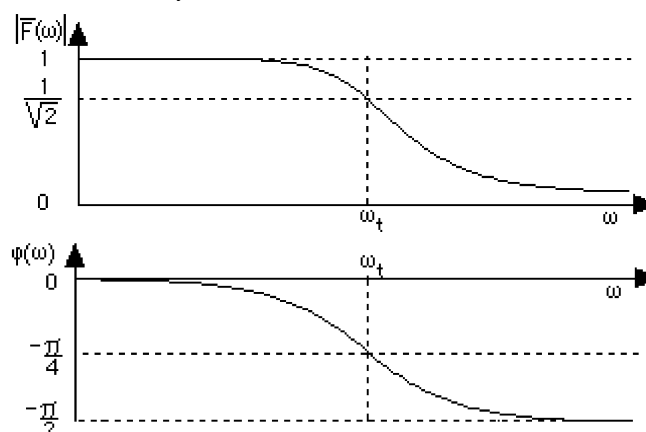


La funzione di trasferimento complessa si ricava immediatamente ricordando che la tensione di uscita (complessa) è pari al prodotto dell'impedenza di uscita $\frac{1}{j\omega C}$ per l'intensità di corrente (complessa). Questa è data dal rapporto tra la tensione di ingresso (complessa) e l'impedenza vista dal generatore. Poiché l'impedenza della serie è pari alla somma delle impedenze:

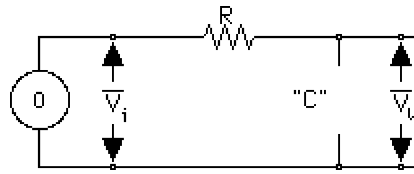
$$\bar{F}(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Da tale espressione si ricavano il modulo della funzione di trasferimento complessa (rapporto delle ampiezze reali della tensione di uscita e quella di ingresso) e la sua fase (differenza di fase fra le tensioni reali di uscita e di ingresso):

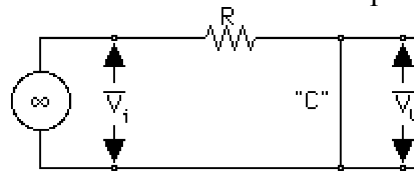
$$|\bar{F}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad \varphi(\omega) = -\arctg(\omega RC)$$



Per frequenza nulla (corrente continua) si ha $|\bar{F}(0)| = 1$. Infatti per correnti continue la capacità si comporta come un circuito aperto e quindi, non circolando corrente, la tensione di uscita è uguale a quella di ingresso:



Invece per frequenze infinitamente elevate si ha: $|\bar{F}(\infty)| = 0$. Infatti la capacità si comporta come un corto circuito e quindi ai suoi estremi non c'è differenza di potenziale (tensione di uscita nulla):



Il comportamento di questo circuito è caratterizzato dal valore della costante di tempo del circuito

$\tau = RC$ in quanto resistenza e capacità compaiono solo come prodotto: $\bar{F}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$ [12] da cui

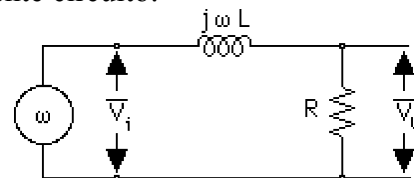
$$|\bar{F}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \quad \text{e} \quad \varphi(\omega) = -\arctg(\omega\tau)$$

Se $\omega = \omega_t = \frac{1}{\tau}$ (pulsazione di taglio) il modulo della funzione di trasferimento e la fase valgono:

$$|\bar{F}(\omega_t)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \varphi(\omega_t) = -\frac{\pi}{4}$$

Il significato della pulsazione e della **frequenza di taglio** è il seguente: per frequenze inferiori a quella di taglio la funzione di trasferimento vale circa 1 (la tensione di ingresso viene trasmessa pressoché inalterata in uscita) mentre per valori superiori alla frequenza di taglio la tensione di uscita tende ad annullarsi. In sostanza solo le basse frequenze passano (passa basso); le alte frequenze non vengono trasmesse all'uscita del quadrupolo (taglia alto).

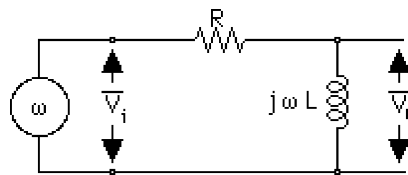
ESERCIZIO: si analizzi il seguente circuito:



e si ricavi l'espressione della funzione di trasferimento complessa. Se il risultato è corretto si deve ottenere che ponendo $\tau = \frac{L}{R}$ il circuito si comporta esattamente come il circuito passa basso descritto in precedenza.

¹² Questo comportamento del modulo e della fase della funzione di trasferimento suggerisce due metodi per la misura della costante di tempo del circuito: una volta riprodotti gli andamenti in funzione della frequenza si possono ricavare graficamente i due valori della frequenza di taglio e da questi risalire al valore di RC ottenuto in due modi indipendenti.

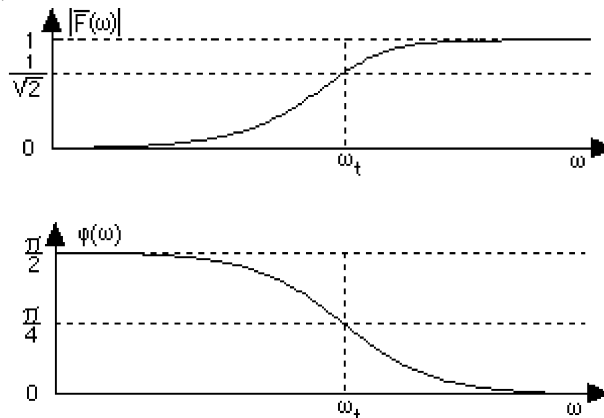
- Il seguente è invece un circuito **passa alto** (o taglia basso)



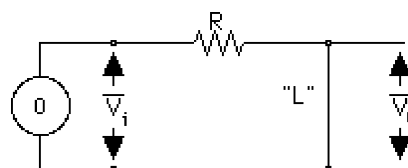
La funzione di trasferimento si ricava ricordando che la tensione di uscita è pari al prodotto dell'impedenza di uscita $j\omega L$ per l'intensità di corrente. Questa è data dal rapporto fra la tensione di ingresso e l'impedenza vista dal generatore:

$$\bar{F}(\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + \frac{R}{j\omega L}} = \frac{1}{1 - j\frac{R}{\omega L}} \text{ da cui:}$$

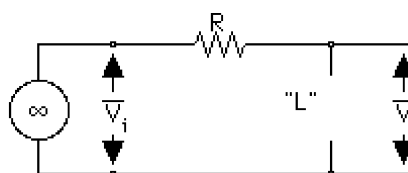
$$|\bar{F}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}} \quad \text{e} \quad \varphi(\omega) = -\arctg\left(-\frac{R}{\omega L}\right) = \arctg\left(\frac{R}{\omega L}\right)$$



Per frequenza nulla (corrente continua) si ha $|\bar{F}(0)| = 0$. Infatti per correnti continue l'induttanza si comporta come un corto circuito e quindi la tensione di uscita è nulla:



Invece per frequenze infinitamente elevate si ha: $|\bar{F}(\infty)| = 1$. Infatti l'induttanza si comporta come un circuito aperto e quindi, non circolando corrente in R, la tensione di uscita è uguale a quella d'ingresso:



Il comportamento di questo circuito è caratterizzato dalla costante di tempo $\tau = \frac{L}{R}$: i valori dell'induttanza e della resistenza compaiono infatti solo come rapporto:

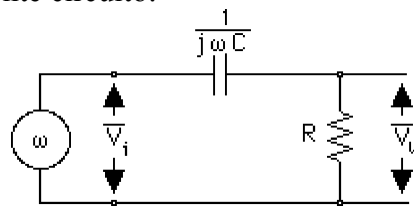
$$\bar{F}(\omega) = \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega\tau}} \quad |\bar{F}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega\tau}\right)^2}} \quad \varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{1}{\omega\tau}\right)$$

Quando $\omega = \omega_t = \frac{1}{\tau}$ (pulsazione di taglio) il modulo della funzione di trasferimento e la fase

valgono: $|\bar{F}(\omega_t)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \varphi(\omega_t) = \frac{\pi}{4}$.

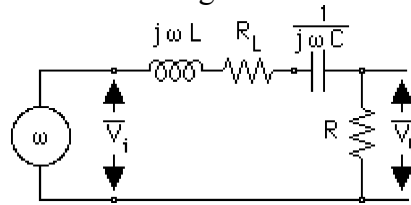
Il significato della pulsazione e della **frequenza di taglio** è il seguente: per frequenze inferiori a quella di taglio la funzione di trasferimento vale circa 0 (la tensione di uscita è circa nulla) mentre per valori superiori alla frequenza di taglio la tensione di ingresso viene trasmessa quasi inalterata in uscita. In sostanza solo le alte frequenze passano (passa alto); le basse frequenze non vengono trasmesse all'uscita del quadrupolo (taglia basso).

ESERCIZIO: si analizzi il seguente circuito:



e si ricavi l'espressione della funzione di trasferimento complessa. Se il risultato è corretto si deve ottenere che ponendo $\tau = RC$ il circuito si comporta esattamente come il circuito passa alto descritto in precedenza.

- Un circuito dalle molteplici applicazioni è il seguente circuito risonante (**filtro passa banda**):

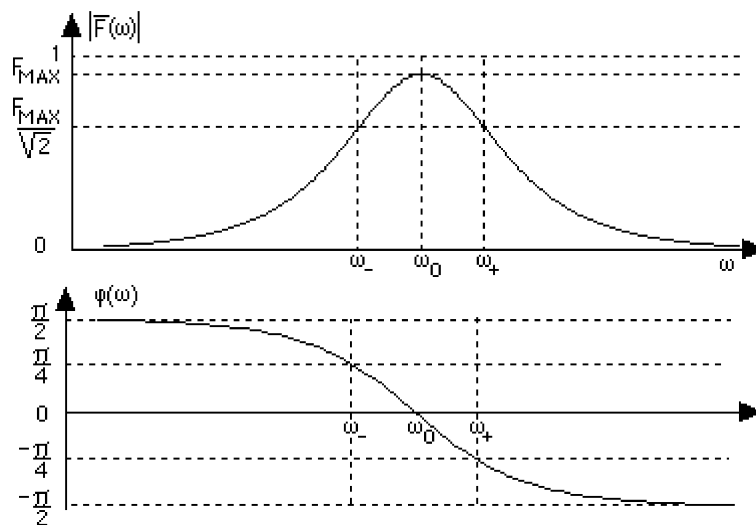


R_L rappresenta la resistenza non nulla sempre presente in un induttore reale. La funzione di trasferimento si ricava ricordando che la tensione di uscita è pari al prodotto dell'impedenza di uscita (R) per l'intensità di corrente. Questa è data dal rapporto della tensione di ingresso e l'impedenza vista dal generatore:

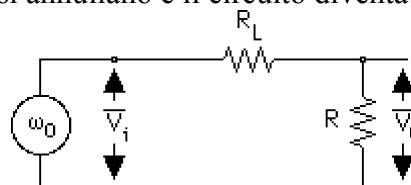
$$\bar{F}(\omega) = \frac{R}{j\omega L + R_L + \frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{\frac{R}{R + R_L}}{1 + \frac{j}{R + R_L} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

Da tale espressione si ricavano il modulo e la fase della funzione di trasferimento :

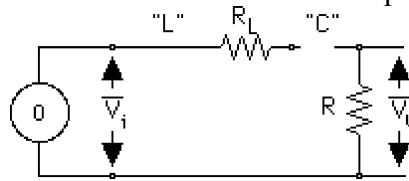
$$|\bar{F}(\omega)| = \frac{\frac{R}{R + R_L}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{R + R_L} \right)^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad \varphi(\omega) = -\arctg \left(\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R + R_L} \right)$$



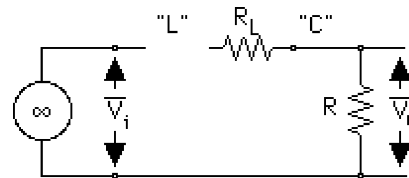
Nella funzione di trasferimento le reattanze induttiva e capacitiva si annullano se: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. In corrispondenza di tale pulsazione (detta di **risonanza**) la funzione di trasferimento vale: $\bar{F}(\omega_0) = \frac{R}{R + R_L}$; cioè una quantità reale che implica uno sfasamento nullo: alla risonanza i contributi induttivi e capacitivi si annullano e il circuito diventa:



Per frequenza nulla (corrente continua) e infinita si ha $|\bar{F}(0)| = |\bar{F}(\infty)| = 0$. Infatti per correnti continue l'induttanza si comporta come un corto circuito e la capacità come un circuito aperto:



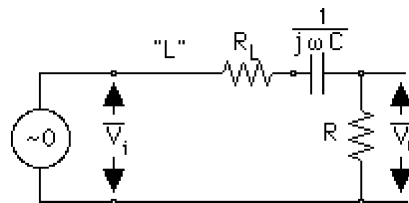
Invece per frequenze infinitamente elevate l'induttanza si comporta come un circuito aperto e la capacità come un corto circuito:



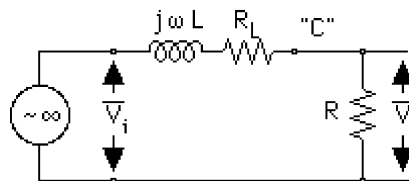
In entrambi i casi nella resistenza posta all'uscita del quadrupolo non circola corrente.

Dal punto di vista della fase si osserva che in condizioni di risonanza il circuito è puramente resistivo: $\varphi(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}) = 0$;

a basse frequenze $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$ e poiché l'impedenza è dominata dalla capacità e il circuito equivale a un passo alto:



alle alte frequenze, infine, $\varphi(\infty) = -\frac{\pi}{2}$ e poiché l'impedenza è di tipo induttivo, il circuito equivalente è un passa basso:



Una generalizzazione del comportamento di questo circuito (utilizzata ogni qualvolta si debba descrivere un fenomeno di risonanza, anche meccanico) si ottiene riscrivendo la funzione di trasferimento nel seguente modo:

$$\bar{F}(\omega) = \frac{\frac{R}{R + R_L}}{1 + \frac{j}{R + R_L} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{\frac{R}{R + R_L}}{1 + \frac{j}{R + R_L} \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\omega \sqrt{LC} - \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} \right)} = \frac{F_{MAX}}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

$$|\bar{F}(\omega)| = \frac{F_{MAX}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad \varphi(\omega) = -\arctg \left(Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)$$

Dove il massimo della funzione di trasferimento è indicato con $F_{MAX} = \frac{R}{R + R_L}$ ($|\bar{F}(\omega_0)| = F_{MAX}$) e

$Q = \frac{1}{R + R_L} \sqrt{\frac{L}{C}}$ è un parametro caratteristico dei sistemi risonanti detto **fattore di merito**. Il suo significato è legato alla larghezza relativa della curva di risonanza: più è elevato il Q e più la curva è stretta.

Si considerino le due pulsazioni per le quali la funzione di trasferimento è pari a $|\bar{F}(\omega_{\pm})| = \frac{F_{MAX}}{\sqrt{2}}$.

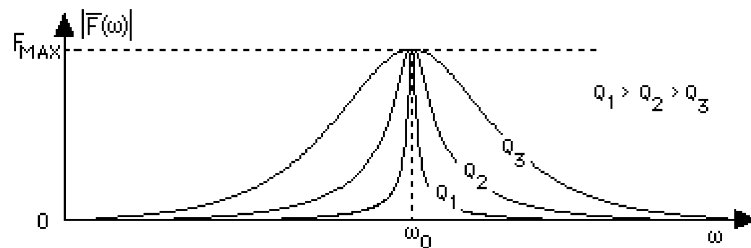
Con qualche passaggio elementare si ottiene

$$Q^2 \left(\frac{\omega_{\pm} - \omega_0}{\omega_{\pm}} \right)^2 = 1 \Rightarrow \omega_{\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 + 4Q^2} \pm \frac{\omega_0}{2Q}$$

e quindi:

$$\omega_+ - \omega_- = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-} = \frac{v_0}{v_+ - v_-}$$

Da qui si vede che se la curva è stretta le frequenze di taglio sono vicine e quindi il Q è elevato.



IL METODO SIMBOLICO IN MECCANICA

Supponiamo che un sistema (per esempio meccanico, ma la trattazione si può estendere, al solito, ad altri campi) sia caratterizzato da una equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea con il termine noto (sollecitazione) funzione sinusoidale del tempo:

$$a \ddot{x} + b \dot{x} + c x = d \cos(\omega t) \quad \text{per } t > 0 \quad 1)$$

la cui soluzione è data dalla somma di un integrale generale dell'omogenea che caratterizza il transitorio (intervallo temporale necessario affinché si raggiunga la situazione di regime) più una soluzione particolare (che rappresenta la situazione di regime).

Dopo un tempo caratterizzato dall'esponentiale $e^{-\frac{b}{2a}t}$ si può ritenere quindi che x abbia un andamento sinusoidale così come sinusoidale è la sollecitazione forzante:

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi) \quad 2)$$

dove A e φ sono in generale funzioni di ω .

Sostituendo la soluzione a regime 2) nella 1) si ha:

$$- a A \omega^2 \cos(\omega t - \varphi) - b A \omega \sin(\omega t - \varphi) + c A \cos(\omega t - \varphi) = d \cos(\omega t) \quad 3)$$

Aniché procedere con la 3) utilizzando le formule di prostaferesi utilizziamo il metodo simbolico per risolvere la 1).

Dopo il transitorio ci aspettiamo quindi che il sistema descritto dalla 1), sollecitato con: $d e^{j \omega t}$, risponda con:

$$x(t) = A e^{j(\omega t - \varphi)}$$

Dalla 1) si ha quindi:

$$a A \omega^2 e^{j(\omega t - \varphi)} + b A j \omega e^{j(\omega t - \varphi)} + c A e^{j(\omega t - \varphi)} = d e^{j \omega t}$$

da cui, eliminando la dipendenza temporale contenuta nel fattore rotante $e^{j \omega t}$, si ottiene:

$$a A \omega^2 e^{-j \varphi} + b A j \omega e^{-j \varphi} + c A e^{-j \varphi} = d; \quad \text{quindi:}$$

$$A = \frac{d}{e^{-j \varphi} [(c - a \omega^2) + j \omega b]} \quad 4)$$

Poiché A e d sono quantità reali, tale deve essere anche il denominatore della 4); pertanto:

$$A(\omega) = \frac{d}{\sqrt{(c - a \omega^2)^2 + \omega^2 b^2}} \quad \text{e} \quad \varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{\omega b}{c - a \omega^2}\right) \quad 5)$$

Per comprendere meglio il significato degli andamenti delle equazioni 5) riscriviamole in termini delle quantità:

$A(0) = \frac{d}{c}$, che rappresenta il valore asintotico che verrebbe raggiunto da $x(t)$ qualora la sollecitazione non fosse sinusoidale ma di valore costante e pari a d ;

$\omega_N = \sqrt{\frac{c}{a}}$, che è la pulsazione naturale di risonanza (quella alla quale oscillerebbe il sistema se il termine di smorzamento b fosse nullo);

$b_c = 2\sqrt{ac}$, che è il valore di smorzamento critico per il quale si annulla il discriminante dell'equazione caratteristica associata alla 1).

Sostituendo nelle 5) si ha: $A(\omega) = \frac{A(0)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_N^2}\right)^2 + 4 \frac{\omega^2}{\omega_N^2} \frac{b^2}{b_c^2}}}$ e $\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{2 \frac{\omega}{\omega_N} \frac{b}{b_c}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_N^2}}\right)$ 6)

Per rendere gli andamenti universali introduciamo due variabili adimensionali:

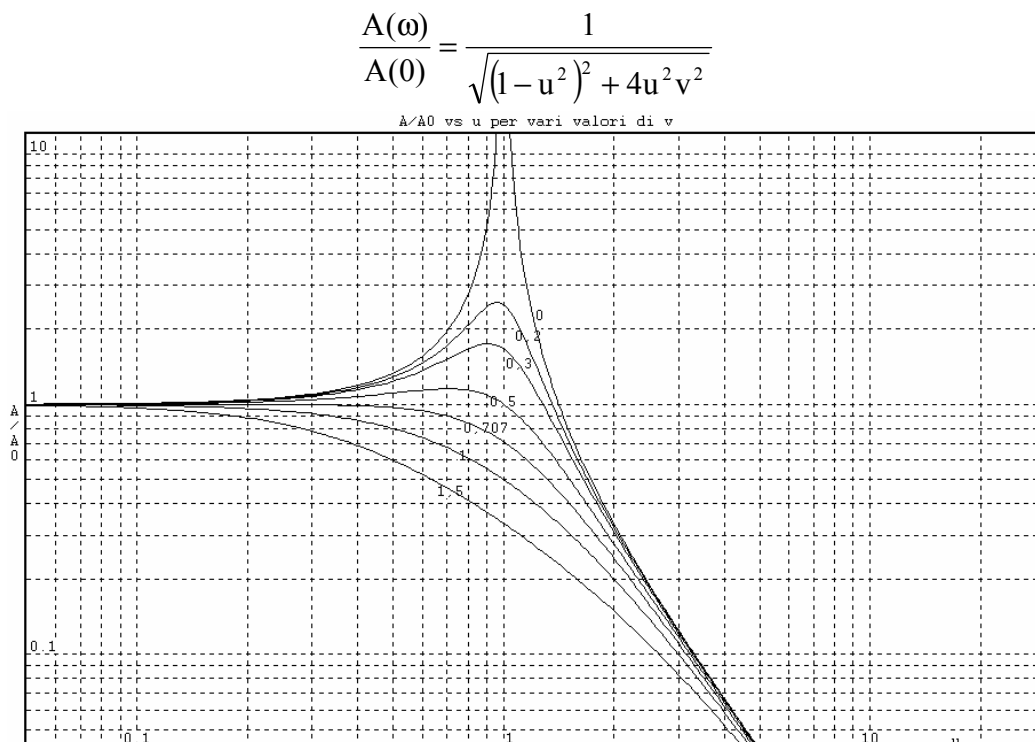
$u = \frac{\omega}{\omega_N}$, che esprime la pulsazione della sollecitazione in termini di quella di risonanza naturale

$v = \frac{b}{b_c}$, che esprime il coefficiente di smorzamento in termini di quello critico.

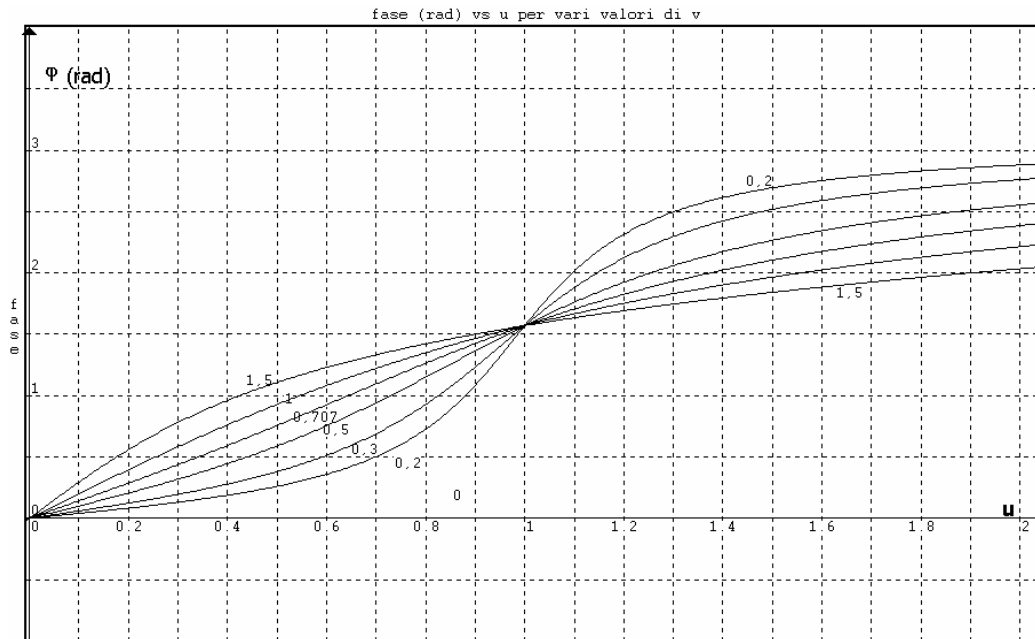
Sostituendo si ottengono quindi:

$\frac{A(\omega)}{A(0)} = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4u^2v^2}}$ e $\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{2uv}{1-u^2}\right)$ 7)

Tali andamenti sono riportati nei seguenti grafici:



$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{2uv}{1-u^2}\right)$$



Notare che per $v = 1/\sqrt{2} = 0,707 < 1$ (cioè un sistema leggermente sottosmorzato) si ottiene che per ogni $u \leq 1$: $A(\omega) \approx A(0)$ e $\varphi(\omega) \approx k u$.

Questo significa che fintanto che la sollecitazione del sistema avviene ad una pulsazione inferiore a quella naturale risulta:

$$x(t) \approx A(0) \cos\left[\left(\omega t\right) - k \frac{\omega}{\omega_N}\right] = A(0) \cos\left[\omega\left(t - \frac{k}{\omega_N}\right)\right] = A(0) \cos[\omega(t - \tau)]$$

cioè la risposta segue fedelmente la sollecitazione d'ingresso senza distorsioni né di ampiezza (l'ampiezza A è costante al variare della pulsazione) né di fase (anche la fase è costante, il solo effetto è l'introduzione di un ritardo pari a $\tau = \frac{k}{\omega_N}$).

Nel caso particolare di uno strumento di misura questo significa, per esempio, che l'ampiezza $A(\omega)$ della deflessione dell'indice è proporzionale a quella della grandezza in misura (d) indipendentemente dalla pulsazione.

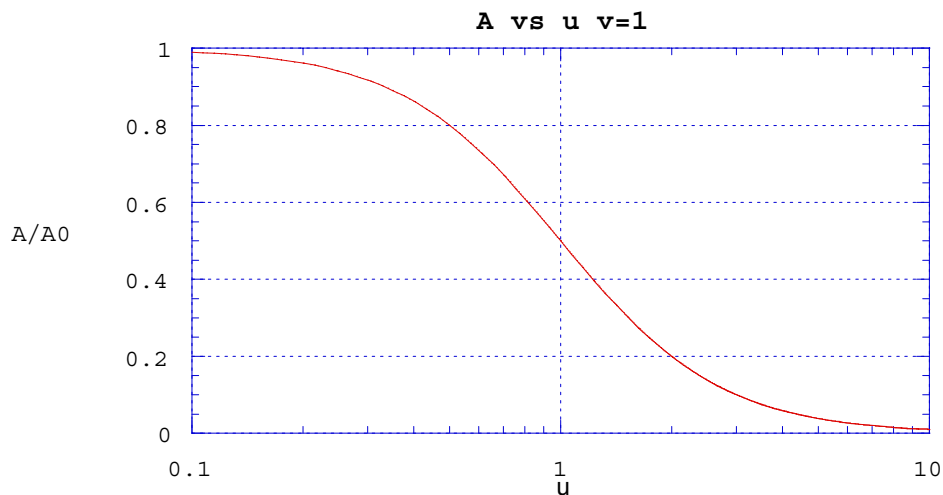
Nel caso di un sistema di amplificazione elettronica si cerca sempre di ridurre le distorsioni che, per esempio, condurrebbero a sgradevoli riproduzioni nei sistemi ad alta fedeltà.

Per capire il significato della prima delle 7) mettiamoci in condizioni di smorzamento critico ($v=1$), per valori prossimi ad esso il ragionamento rimane sostanzialmente lo stesso.

Ponendo $v=1$ si ha: $\frac{A(\omega)}{A(0)} = \frac{1}{1+u^2}$ cioè finché la pulsazione è bassa (rispetto a quella naturale:

$u < 1$) la risposta segue fedelmente la sollecitazione mentre per alte frequenze ($u > 1$) l'ampiezza della risposta è fortemente depressa^[13].

¹³ si noti come per $\omega = \omega_N/2$ $A(\omega) = 0,8 A(0)$ e come per $\omega = 2 \omega_N$ $A(\omega) = 0,2 A(0)$



Ciò ad esempio significa che, pensando ad una qualsiasi sollecitazione periodica $f(t)$ scomponibile in serie di Fourier, se per l'armonica fondamentale (quella di frequenza pari a quella della $f(t)$) $u > 1$, a maggior ragione ciò sarà vero per le altre armoniche (il loro periodo è multiplo intero di quello della fondamentale). Di conseguenza dei termini dello sviluppo in serie l'unico che contribuirà al segnale di uscita, avendo ampiezza non nulla, sarà il termine costante che corrisponde al valore della $f(t)$ mediato su un periodo: un eventuale strumento che si basi su questo principio non fornirà una misura della $f(t)$ che varia troppo rapidamente^[14] ma ne indicherà il valore medio.

Il metodo descritto si riferisce ad un sistema del secondo ordine; sapreste^[15] applicarlo ad uno del primo ordine, ad esempio per studiare la risposta di un termometro ad una temperatura variabile sinusoidalmente nel tempo?

¹⁴ è chiaro il significato di troppo rapidamente: il termine di paragone è la pulsazione naturale di risonanza dello strumento

¹⁵ è ovvio che la vostra risposta deve essere sì